

Universidade Federal de Sao Carlos
Departamento de Física

Equação Mestra não-linear aplicada ao estudo de Biestabilidade Óptica.

Alexandre Calzavara Yoshida

Dissertação apresentada ao Departamento de Física
da Universidade Federal de São Carlos para a obtenção
do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi

Sao Carlos - 2004

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

Y65em

Yoshida, Alexandre Calzavara.

Equação mestra não-linear aplicada ao estudo de bioestabilidade óptica / Alexandre Calzavara Yoshida . -- São Carlos : UFSCar, 2004.
69p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1.Física óptica. 2. Ótica quântica. 3. Bioestabilidade óptica. 4. Equação mestra. I. Título.

CDD: 535.2(20^a)

Dedico este trabalho a Patricia Cristina Venturini.

Este trabalho teve o apoio
financeiro da CAPES.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma equação mestra generalizada para um sistema constituído de N átomos de dois níveis bombeados por um campo clássico, interagindo

Abstract

In this dissertation, we present a generalized master equation for a system of N two-level atoms pumped by a classical field, interacting with a reservoir. The kinds of reservoirs

Sumário

1	Introdução	p. 3
2	Teoria quântica da relaxação via Equação Mestra	p. 6
2.1	Operador Densidade	p. 6
2.2	Equação Mestra	p. 10
2.3	Equação mestra para o átomo de dois níveis	p. 12
2.3.1	Reservatório Térmico	p. 14
2.3.2	Reservatório de Vácuo Comprimido	p. 19
3	Equação Mestra para o átomo de dois níveis bombeado por um campo eletromagnético clássico	p. 23
3.1	Reservatório Térmico	p. 27
3.2	Reservatório de Vácuo Comprimido	p. 30
4	Equação mestra não linear para um átomo à partir da equação mestra linear para N átomos na aproximação de campo médio	p. 34
4.1	Equação mestra linear para N átomos de dois níveis	p. 34
4.2	Equação mestra não linear	p. 37
5	Biestabilidade óptica	p. 46
5.1	Reservatório Térmico	p. 50
5.2	Vácuo Comprimido	p. 56
6	Conclusões	p. 67

1 Introdução

Sistemas físicos fechados constituem uma aproximação para o mundo real, pois não levam em conta a interação do sistema com o resto do universo. De maneira geral na natureza um sistema físico pode ser fortemente influenciado pelo meio que o cerca. A dinâmica de sistemas quânticos abertos tem sido tratada via teoria quântica de relaxação, acoplando-se o sistema de interesse a um reservatório ^[1-5], o qual simula o meio ambiente, que consiste em um conjunto de muitos graus de liberdade, sendo o responsável pelos processos irreversíveis.

Ao estudarmos um simples átomo de dois-níveis, temos que considerar que este está acoplado a um reservatório térmico (que pode ser simulado por um conjunto de osciladores), desta forma podemos descrever efeitos como a largura de linha espectral e o decaimento atômico ^[6, 7]. Outro efeito devido a presença de um reservatório é a perda de informação contida nas correlações de fase de um estado de superposição, ou perda de coerência ^[8-10]. Gardiner ^[11] mostrou que um reservatório de vácuo comprimido pode alterar sensivelmente os processos de perda de coerência para átomos de dois níveis.

Um sistema constituído de N átomos de dois níveis foi originalmente estudado por R. H. Dicke em 1954 ^[12], o qual previu teoricamente que, sob certas circunstâncias, a taxa de radiação emitida é proporcional ao quadrado do número de átomos. Este fenômeno é conhecido como superradiância, e foi observado experimentalmente por N. Skribanowitz *et al* ^[13]. A superradiância consiste na emissão espontânea coletiva de um pulso eletromagnético gerado por um sistema constituído de N átomos de dois níveis, onde os átomos são preparados no estado excitado, e decaem espontaneamente para o estado fundamental em um intervalo de tempo inversamente proporcional ao número de átomos do sistema, $\tau \propto N^{-1}$. Desta forma a intensidade da emissão torna-se proporcional a N^2 , uma vez que energia total irradiada pelos N átomos é $N\hbar\omega_0$.

A emissão coletiva deste sistema constituído de N átomos de dois níveis foi estudado por Agarwal que, utilizando técnicas formais de equação mestra nas aproximações de

Markov e de Born, obteve uma equação mestra linear para um conjunto de N átomos [14–17]. Em [18] os autores deduziram uma equação mestra não linear na aproximação de campo médio para $p < N$ átomos a partir da equação mestra obtida por Agarwal. Uma variação da equação obtida em [18] foi utilizada para estudar os efeitos de biestabilidade óptica considerando um reservatório de vácuo comprimido [19].

O comportamento biestável do campo emergente de um sistema constituído de N átomos de dois níveis foi estudado numericamente por McCall [20] em 1974 e observado experimentalmente em 1976 por Gibbs *et al* [21]. Com o intuito de estudar possíveis dispositivos aplicando biestabilidade óptica, Bonifacio e Lugiato [22, 23] propuseram um modelo teórico analiticamente solúvel para explicar este fenómeno. Desde então este sistema de N átomos bombeados por um campo clássico e acoplados a um reservatório, térmico ou de vácuo comprimido, tem sido um problema bastante conhecido na literatura [24–33]. O fenómeno de biestabilidade óptica consiste no controle de luz por luz, ou seja, podemos obter uma relação entre o campo de saída a partir do campo de entrada, o que pode permitir a construção de dispositivos ópticos.

Neste trabalho com o objetivo de estudar o comportamento biestável apresentado entre os campos de entrada e de saída em uma amostra constituída de átomos de dois níveis, primeiramente estudamos os possíveis efeitos do campo clássico no acoplamento átomo-reservatório, obtendo uma equação mestra não linear para um átomo representativo da amostra a partir de uma equação mestra linear para N . Utilizando a equação mestra não linear estudamos como os diferentes tipos de acoplamento átomo-reservatório podem influenciar o fenómeno de biestabilidade óptica.

A disposição dos capítulos desta dissertação foi elaborada de modo a permitir que o leitor tivesse uma visão sequencial do que foi estudado e desenvolvido durante este período de mestrado. No capítulo 2 apresentamos as ideias de teoria quântica de relaxação via equação mestra. Este capítulo inicial é dedicado aos que irão se iniciar no estudo de equações mestras. Apresentamos os conceitos básicos envolvidos e calculamos alguns exemplos de equações mestras. No capítulo 3 desenvolvemos o formalismo para o cálculo de uma equação mestra generalizada, onde levamos em consideração um campo clássico bombeando o átomo de dois níveis, modificando a estrutura da equação mestra. No capítulo 4 apresentamos ao leitor a equação mestra não linear um pouco diferente da obtida em [19] para um átomo representativo da amostra, onde agora o campo clássico pode interferir no acoplamento átomo-reservatório e consequentemente na dinâmica dos valores médios do sistema. No capítulo 5 estudamos o comportamento biestável do campo

emergente de uma amostra constituída de N átomos de dois níveis (acoplados a um reservatório) bombeados por um campo eletromagnético clássico, e como o fenômeno de biestabilidade é afetado pelos parâmetros do reservatório, assim como pelo acoplamento átomo-reservatório. Finalmente no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões sobre o estudo realizado.

2 Teoria quântica da relaxação via Equação Mestra

2.1 Operador Densidade

Um sistema físico quântico pode ser representado por um vetor de estado $|\psi\rangle$, o qual contém toda a informação sobre o mesmo, que foi previamente preparado e caracterizado. Entretanto, em muitas situações o vetor de estado do sistema não pode ser determinado exatamente, e a informação a respeito do mesmo é representada por uma distribuição de probabilidades, ou seja, podemos simplesmente dizer que o sistema tem probabilidade P_i , ($0 \leq P_i \leq 1$, $\sum_i P_i = 1$, $i = 1 \dots \mathcal{N}$, onde \mathcal{N} é o número de sistemas no ensemble), de ser descrito por um estado $|\psi^{(i)}\rangle$.

O sistema que se encontra em um estado puro $|\psi\rangle$ tem sua evolução temporal descrita pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \mathbf{H}|\psi\rangle, \quad (2.1.1)$$

onde \mathbf{H} é o hamiltoniano do sistema.

Para obtermos informação do sistema associada a um observável \mathbf{A} basta calcular o seu valor esperado,

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle \quad (2.1.2)$$

e seus momentos de ordem mais alta

$$\langle \mathbf{A}^n \rangle = \langle \psi | \mathbf{A}^n | \psi \rangle, n \geq 2. \quad (2.1.3)$$

Quando o sistema não pode ser representado por um único vetor de estado dizemos que este se encontra em uma mistura estatística de estados, ou seja, tem probabilidade P_1 de estar no estado $|\psi_1\rangle$, P_2 de estar no estado $|\psi_2\rangle$, P_3 de estar no estado $|\psi_3\rangle$, e assim por diante. No entanto é importante observarmos que mistura estatística de estados é

diferente de um estado de superposição (que é um estado puro).

Por exemplo, sejam dois sistemas idênticos preparados inicialmente de formas diferentes, S_1 e S_2 , S_1 é caracterizado por um estado puro e normalizado $|\psi\rangle = a|\psi_a\rangle + b|\psi_b\rangle$, ($|a|^2 + |b|^2 = 1$), e o sistema S_2 se encontra em uma mistura estatística de estados, com probabilidade $P_a = |a|^2$ de ser encontrado no estado $|\psi_a\rangle$, e $P_b = |b|^2$ de ser encontrado no estado $|\psi_b\rangle$. Sejam $|\psi_a\rangle$ e $|\psi_b\rangle$ autoestados do observável O , ou seja, $O|\psi_a\rangle = o_a|\psi_a\rangle$ e $O|\psi_b\rangle = o_b|\psi_b\rangle$, teremos como possíveis resultados de uma medida deste observável em S_1 e S_2 os autovalores o_a com probabilidade $|a|^2$ e o_b com probabilidade $|b|^2$ para ambos os sistemas. Embora os resultados pareçam ser idênticos, estes dois sistemas podem ser distinguidos fazendo-se medidas de interferência entre os estados $|\psi_a\rangle$ e $|\psi_b\rangle$, o que será observado no sistema S_1 , que é um estado superposto, e não será observado no sistema S_2 , que é uma mistura estatística de estados.

Para obtermos o valor esperado de um observável A em um sistema representado por uma mistura estatística de estados, tomamos a média de A em um ensemble [7], onde $\langle A \rangle_i = \langle \psi^{(i)} | A | \psi^{(i)} \rangle$, de maneira que

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \psi^{(i)} | A | \psi^{(i)} \rangle. \quad (2.1.4)$$

Escolhendo uma base de estados do sistema, ortogonal e completa, $\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \mathbf{1}$, $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{i,j}$ é fácil verificar que a equação (2.1.4) pode ser reescrita como

$$\langle A \rangle = \sum_j \langle\phi_j| \sum_i P_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| A |\phi_j\rangle, \quad (2.1.5)$$

e podemos definir o operador densidade do sistema como

$$\rho = \sum_i P_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|. \quad (2.1.6)$$

Uma vez definido o operador densidade podemos calcular o valor esperado de um observável A substituindo a equação (2.1.6) em (2.1.5) e obtemos a seguinte expressão

$$\langle A \rangle = Tr(\rho A). \quad (2.1.7)$$

O operador densidade ρ representa a descrição mais geral de um sistema quântico, pois ele tanto pode descrever misturas estatísticas ou estados puros. O operador densidade puro é representado por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (um elemento do ensemble).

Algumas propriedades do operador densidade ρ podem ser facilmente verificadas

1. O operador densidade é positivo definido: seus elementos diagonais são reais e não negativos ($\langle \phi_i | \rho | \phi_i \rangle \geq 0, \forall |\phi_i\rangle$);
2. O operador densidade é Hermitiano $\rho = \rho^\dagger$;
3. $Tr\rho = 1$, onde $Tr\rho = \sum_j \langle \phi_j | \rho | \phi_j \rangle$, que representa a condição de estados normalizados, ou seja, $\langle \psi^{(i)} | \psi^{(i)} \rangle = 1$ uma vez que $\sum_i P_i = 1$;
4. $Tr\rho^2 \leq 1$, para demonstrar esta propriedade primeiramente escreveremos o operador densidade em uma base diagonal,

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k \rho_{kk} |\phi_k\rangle \langle \phi_k| \\ &= \sum_k p_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k|, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

onde

$$\begin{aligned} p_k &= \langle \phi_k | \rho | \phi_k \rangle \\ &= \sum_i P_i \langle \phi_k | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \phi_k \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

sendo $0 \leq p_k \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \sum_k p_k &= \sum_k \sum_i P_i \langle \phi_k | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \phi_k \rangle \\ &= \sum_i P_i = 1. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Desta maneira podemos escrever

$$\begin{aligned} Tr\rho^2 &= \sum_j \langle \phi_j | \rho^2 | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{j,k,k'} p_k p_{k'} \langle \phi_j | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle \langle \phi_{k'} | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{k,k'} p_k p_{k'} \delta_{kk'} \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle \\ &= \sum_k p_k^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

onde $Tr\rho^2$ será igual a 1 se $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, que é um estado puro. Esta relação permite medir a pureza do sistema, visto que para $Tr\rho^2 < 1$ temos uma mistura estatística

e para $Tr \rho^2 = 1$ um estado puro.

A evoluçao temporal do operador densidade ρ descrita pela equaçao de Liouville-von Neumann ^[4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \rho], \quad (2.1.12)$$

onde \mathbf{H} ρ o operador hamiltoniano do sistema. A equaçao (2.1.12) pode ser obtida a partir da equaçao de Schrödinger^[34].

Nas seções subsequentes o operador densidade descreverá um sistema constituído por dois subsistemas; o subsistema \mathcal{S} (que pode ser um átomo de dois níveis), em cujas propriedades físicas estamos interessados, que interage com um outro subsistema \mathcal{R} (um reservatório de radiação). Consideraremos que, inicialmente, os dois subsistemas estão desacoplados, desta forma podemos escrever o operador densidade deste conjunto como

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{SR}}(0) &= \rho_{\mathcal{S}}(0) \otimes \rho_{\mathcal{R}}(0) \\ &\equiv \rho_{\mathcal{S}}(0) \rho_{\mathcal{R}}(0). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

O operador hamiltoniano que descreve este sistema composto ρ

$$\mathbf{H}_{\mathcal{S}+\mathcal{R}} = \mathbf{H}_{\mathcal{S}} + \mathbf{H}_{\mathcal{R}} + \mathbf{H}_{\mathcal{SR}}, \quad (2.1.14)$$

onde $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}$ ρ o hamiltoniano do átomo (ou do sistema físico que está em contato com o reservatório), $\mathbf{H}_{\mathcal{R}}$ ρ o hamiltoniano do reservatório e $\mathbf{H}_{\mathcal{SR}}$ ρ o hamiltoniano de interação átomo-reservatório. Estes hamiltonianos serão apresentados nas seções subsequentes.

Uma vez calculada a evoluçao temporal do operador densidade $\rho_{\mathcal{SR}}(t)$, a informação sobre o átomo (subsistema \mathcal{S} apenas) estará contida no operador densidade reduzido $\rho_{\mathcal{S}}(t)$, que ρ obtido calculando o traço do operador $\rho_{\mathcal{SR}}(t)$ em relação às variáveis do reservatório ^[1-5], ou seja,

$$\rho_{\mathcal{S}}(t) = Tr_{\mathcal{R}} \rho_{\mathcal{SR}}(t). \quad (2.1.15)$$

Desta forma podemos obter o valor esperado de um operador \mathbf{C} do subsistema \mathcal{S} em um dado tempo t a partir das equações (2.1.7) e (2.1.15)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{C} \rangle &= Tr_{\mathcal{S}} (\rho_{\mathcal{S}}(t) \mathbf{C}) \\ &= Tr_{\mathcal{S}} (Tr_{\mathcal{R}} (\rho_{\mathcal{SR}}(t)) \mathbf{C}). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Na próxima seção deduziremos a equaçao mestra que rege a dinâmica (evoluçao tempo-

ral) do operador densidade do sistema conjunto ($\mathcal{S} + \mathcal{R}$). Obteremos, também, a dinâmica do subsistema \mathcal{S} calculando o traço nas variáveis do reservatório.

2.2 Equação Mestra

Sistemas físicos não são isolados, ou seja, mesmo quando estudamos um simples átomo de dois níveis não levamos em consideração que ele interage com o meio que o circunda (que pode ser representado por um reservatório \mathcal{R}) de maneira dissipativa. Os sistemas físicos isolados são uma idealização que não leva em consideração o resto do universo, que torna os processos irreversíveis.

O reservatório que simula "o resto do universo", por sua vez, tem uma quantidade enorme de graus de liberdade, sendo assim, presume-se que seja pouco afetado pelo subsistema \mathcal{S} (cujas propriedades estamos interessados em estudar).

A equação mestra descreve a dinâmica do sistema \mathcal{S} sob a influência do reservatório. De agora em diante usaremos $\hbar = 1$ para simplificar a notação.

Sejam $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{\mathcal{S}} + \mathbf{H}_{\mathcal{R}}$ o hamiltoniano de \mathcal{S} e \mathcal{R} sem interação, e $\mathbf{U}_0(t) = e^{-i\mathbf{H}_0 t}$ o operador evolução temporal. Na representação de interação o operador densidade e o hamiltoniano de interação são descritos, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{SR}}^I(t) &= \mathbf{U}_0^\dagger(t) \rho_{\mathcal{SR}}(0) \mathbf{U}_0(t) \\ &\equiv \rho_I(t),\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\mathcal{SR}}^I(t) &= \mathbf{U}_0^\dagger(t) \mathbf{H}_{\mathcal{SR}} \mathbf{U}_0(t) \\ &\equiv \mathbf{H}_I(t),\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

e a equação de Liouville-von Neumann na representação de interação ^[35, 36] é dada por

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -i[\mathbf{H}_I(t), \rho_I(t)].\tag{2.2.3}$$

Integrando formalmente a equação (2.2.3) obtemos

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t [\mathbf{H}_I(t'), \rho_I(t')] dt',\tag{2.2.4}$$

e de maneira análoga

$$\rho_I(t') = \rho_I(0) - i \int_0^{t'} [\mathbf{H}_I(t''), \rho_I(t'')] dt''.\tag{2.2.5}$$

Substituindo a equação (2.2.5) em (2.2.4) temos

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t [\mathbf{H}_I(t'), \rho_I(0)] dt' - \int_0^t \int_0^{t'} [\mathbf{H}_I(t'), [\mathbf{H}_I(t''), \rho_I(t'')]] dt'' dt', \quad (2.2.6)$$

e derivando-se a equação (2.2.6) em relação ao tempo temos a equação de movimento para o operador densidade na representação de interação dado por

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -i[\mathbf{H}_I(t), \rho_I(0)] - \int_0^t [\mathbf{H}_I(t), [\mathbf{H}_I(t'), \rho_I(t')]] dt', \quad (2.2.7)$$

que é equivalente à equação de Liouville-von Neumann (2.2.3), pois nenhuma aproximação foi feita.

Para obter-se a dinâmica do subsistema \mathcal{S} , calculamos o traço sobre os graus de liberdade do reservatório na equação (2.2.7)

$$\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = -i \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\mathbf{H}_I(t), \rho_I(0)] - \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\mathbf{H}_I(t), [\mathbf{H}_I(t'), \rho_I(t')]] dt', \quad (2.2.8)$$

onde $\rho_{SI}(t)$ é o operador densidade reduzido na representação de interação.

A equação (2.2.8) é chamada **equação mestra** do subsistema \mathcal{S} na representação de interação. Agora iremos supor que o reservatório \mathcal{R} não sofre mudança de seu estado inicial durante a interação [17] e o operador densidade $\rho_I(t)$ pode ser escrito como

$$\rho_I(t) = \rho_{\mathcal{R}}(0) \rho_{SI}(t). \quad (2.2.9)$$

Inserindo a equação (2.2.9) em (2.2.8) o primeiro termo do lado direito escreve-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\mathbf{H}_I, \rho_I(0)] &= \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\mathbf{H}_I, \rho_{\mathcal{R}}(0) \rho_{SI}(0)] \\ &= [\langle \mathbf{H}_I \rangle_{\mathcal{R}}, \rho_{SI}(0)], \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

e a equação (2.2.8) fica escrita como

$$\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = -i[\langle \mathbf{H}_I \rangle_{\mathcal{R}}, \rho_{SI}(0)] - \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\mathbf{H}_I(t), [\mathbf{H}_I(t'), \rho_I(t')]] dt', \quad (2.2.11)$$

Para voltarmos à representação de Schrödinger, utilizamos a seguinte transformação unitária

$$\rho_{\mathcal{S}} = \mathbf{U}_0(t) \rho_{SI}(t) \mathbf{U}_0^\dagger(t), \quad (2.2.12)$$

com $\mathbf{U}_0(t) = e^{-i\mathbf{H}_0 t}$. Derivando a equação (2.2.12) em relação ao tempo obtemos a

equação mestra na representação de Schrödinger escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} &= -i[\mathbf{H}_0, \rho_S(t)] + U_0(t) \frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} U_0^\dagger(t) \\ &= -i[\mathbf{H}_0, \rho_S(t)] - iU_0(t) [\langle \mathbf{H}_I \rangle_{\mathcal{R}}, \rho_{SI}(0)] U_0^\dagger(t) \\ &\quad - \int_0^t Tr_{\mathcal{R}} U_0(t) [\mathbf{H}_I(t), [\mathbf{H}_I(t'), \rho_I(t')]] U_0^\dagger(t) dt'. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Equações mestras podem ser calculadas para sistemas atômicos, modos quantizados, e outros sistemas físicos. Na seção seguinte calcularemos a equação mestra para o átomo de dois níveis utilizando o formalismo apresentado nesta seção.

2.3 Equação mestra para o átomo de dois níveis

Para equação mestra de um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório (campo de radiação) escreveremos dois exemplos ilustrativos [7, 37]:

1. reservatório térmico;
2. reservatório de vácuo comprimido.

O hamiltoniano que descreve o átomo de dois níveis é

$$\mathbf{H}_S = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z, \quad (2.3.1)$$

para o reservatório temos

$$\mathbf{H}_{\mathcal{R}} = \times_k \omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k, \quad (2.3.2)$$

e o termo de interação átomo-campo na aproximação de dipolo e de onda girante é

$$\mathbf{H}_{S\mathcal{R}} = \times_k (g_k \mathbf{b}_k \sigma_+ + g_k^* \mathbf{b}_k^\dagger \sigma_-). \quad (2.3.3)$$

Portanto o hamiltoniano do sistema átomo-campo é descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} &= \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_{\mathcal{R}} + \mathbf{H}_{S\mathcal{R}} \\ &= \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \times_k \omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k + \times_k (g_k \mathbf{b}_k \sigma_+ + g_k^* \mathbf{b}_k^\dagger \sigma_-). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Os operadores $\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-$ satisfazem as relações de comutação da álgebra do grupo SU(2),

$$[\sigma_z, \sigma_+] = 2\sigma_+ \quad (2.3.5a)$$

$$[\sigma_z, \sigma_-] = -2\sigma_- \quad (2.3.5b)$$

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z, \quad (2.3.5c)$$

e os operadores b_k e b_k^\dagger (bosônicos), são ditos, respectivamente, operadores de destruição e criação de um fóton no campo com energia $\hbar\omega_k$, cujas relações de comutação são

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad (2.3.6a)$$

$$[b_k, b_{k'}] = 0 \quad (2.3.6b)$$

$$[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0. \quad (2.3.6c)$$

O operador evolução temporal do sistema livre é

$$\begin{aligned} U_0(t) &= e^{-iH_0 t} \\ &= e^{-i\frac{\omega_0}{2}\sigma_z t} e^{-i\sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k t}, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

e o termo de interação átomo-campo na representação de interação pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H_I(t) &= U_0^\dagger H_{SR} U_0 \\ &= \sum_k (g_k e^{iH_{\mathcal{R}} t} b_k e^{-iH_{\mathcal{R}} t} e^{iH_S t} \sigma_+ e^{-iH_S t} + g_k^* e^{iH_{\mathcal{R}} t} b_k^\dagger e^{-iH_{\mathcal{R}} t} e^{iH_S t} \sigma_- e^{-iH_S t}) \\ &= \sum_k (g_k b_k \sigma_+ e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} + g_k^* b_k^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t}), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Seguindo o procedimento apresentado na seção (2.2) obtemos a equação mestra para o operador densidade reduzido do sistema átomo de dois níveis interagindo com o campo de radiação na representação de interação. Substituindo o hamiltoniano (2.3.8) e a condição (2.2.9) na equação (2.2.11), a equação mestra é descrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & -i \sum_k^3 g_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} \langle \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_+, \rho_{SI}(0)] + g_k^* e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \langle \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_-, \rho_{SI}(0)] \\
& - \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k g_{k'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma} + \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k g_{k'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'} \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_+]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k^* g_{k'}^* e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_-, \boldsymbol{\sigma}_-]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k^* g_{k'}^* e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_-, \boldsymbol{\sigma} - \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k g_{k'}^* e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma} - \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k^* g_{k'} e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_-]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k^* g_{k'} e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_-, \boldsymbol{\sigma} + \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + \sum_{k,k'}^0 \int_0^t (g_k g_{k'}^* e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_-, \boldsymbol{\sigma}_+]) dt' \quad . \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

A equação (2.3.9) será o ponto de partida para o cálculo da equação mestra do operador densidade do átomo de dois níveis em contato com reservatório térmico ou com o reservatório de vácuo comprimido.

2.3.1 Reservatório Térmico

Neste primeiro exemplo calcularemos a equação mestra para um átomo de dois níveis interagindo com reservatório térmico. O operador densidade para o reservatório pode ser representado por

$$\rho_{\mathcal{R}} = \prod_k (1 - e^{-\frac{\omega_k}{k_B T}}) e^{-\frac{\omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k}{k_B T}}, \quad (2.3.10)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta da radiação, e os valores médios $\langle \mathbf{b}_{k'} \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'} \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}}$ para este reservatório

sao

$$\langle \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} = 0 \quad (2.3.11a)$$

$$\langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = 0 \quad (2.3.11b)$$

$$\langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \mathbf{n}_k \rangle_{\mathcal{R}} \delta_{k,k'} \equiv \bar{n}_k \delta_{k,k'} \quad (2.3.11c)$$

$$\langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \mathbf{n}_k + 1 \rangle_{\mathcal{R}} \delta_{k,k'} \equiv (\bar{n}_k + 1) \delta_{k,k'}. \quad (2.3.11d)$$

sendo $\bar{n}_k = (e^{-\frac{\omega_k}{k_B T}} - 1)^{-1}$ o número médio de fônons térmicos com frequência ω_k .

Substituindo os valores médios, equações (2.3.11), na equação (2.3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_k |g_k|^2 \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} (\bar{n}_k + 1) [\boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_- \rho_{SI}(t')] dt' \\ & + \int_0^t e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} (\bar{n}_k + 1) [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_-] dt' \\ & + \int_0^t e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \bar{n}_k [\boldsymbol{\sigma}_-, \boldsymbol{\sigma}_+ \rho_{SI}(t')] dt' \\ & + \int_0^t e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \bar{n}_k [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_-, \boldsymbol{\sigma}_+] dt' \quad (2.3.12) \end{aligned}$$

Assumiremos que os modos do campo estão pouco espaçados, de maneira que variam de forma aproximadamente contínua, e substituímos as somatórias em k por integrais

$$\begin{aligned} \sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} (\bar{n}_k + 1) & \longrightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 e^{i(\omega_0 - \omega')(t-t')} (\bar{n}(\omega') + 1) d\omega' \\ \sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \bar{n}_k & \longrightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 e^{i(\omega_0 - \omega')(t-t')} \bar{n}(\omega') d\omega', \quad (2.3.13) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}(\omega')$ é a função distribuição de frequências do reservatório.

Vamos fazer uma aproximação, conhecida como Aproximação de Markov, constituindo em substituir $\rho_{SI}(t')$ por $\rho_{SI}(t)$ e estender o limite superior das integrais temporais para infinito. Isto faz com que a equação integro-diferencial se transforme numa equação diferencial, portanto caracterizada pela ausência de "memória". A equação (2.3.12), na

aproximação de Markov, é escrita por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 \left[(\hbar(\omega') + 1) [\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t)] \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \right. \\
& + (\hbar(\omega') + 1) [\rho_{SI}(t) \sigma_+, \sigma_-] \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& + \hbar(\omega') [\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t)] \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& \left. + \hbar(\omega') [\rho_{SI}(t) \sigma_-, \sigma_+] \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \right] d\omega'. \quad (2.3.14)
\end{aligned}$$

Utilizando a seguinte relação [38, 39]

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\pm i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau & = \pi \delta(\omega_0 - \omega') \pm i \mathcal{P} \frac{1}{(\omega_0 - \omega')} \\
& \simeq \pi \delta(\omega_0 - \omega'), \quad (2.3.15)
\end{aligned}$$

onde \mathcal{P} é o valor principal de Cauchy, obtemos a equação mestra para o átomo de dois níveis (doravante omitiremos o subíndice S que designa o átomo).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} & = -\frac{i}{2} \{ (\hbar(\omega_0) + 1) ([\sigma_+, \sigma_- \rho_I(t)] + [\rho_I(t) \sigma_+, \sigma_-]) \\
& \quad + \hbar(\omega_0) ([\sigma_-, \sigma_+ \rho_I(t)] + [\rho_I(t) \sigma_-, \sigma_+]) \} \\
& = -\frac{i}{2} \{ (\hbar(\omega_0) + 1) (\sigma_+ \sigma_- \rho_I - 2 \sigma_- \rho_I \sigma_+ + \rho_I \sigma_+ \sigma_-) \\
& \quad + \hbar(\omega_0) (\sigma_- \sigma_+ \rho_I - 2 \sigma_+ \rho_I \sigma_- + \rho_I \sigma_- \sigma_+) \}, \quad (2.3.16)
\end{aligned}$$

onde $j \equiv 2\pi \mathcal{D}(\omega_0) |g(\omega_0)|^2$.

As equações de movimento para as componentes do operador densidade do átomo

$$\rho_{ee} = \langle e | \rho_I | e \rangle \quad (2.3.17a)$$

$$\rho_{eg} = i \rho_{ge}^{\mathbb{C}*} = \langle e | \rho_I | g \rangle \quad (2.3.17b)$$

$$\rho_{gg} = \langle g | \rho_I | g \rangle, \quad (2.3.17c)$$

podem ser calculadas a partir da equação (2.3.16), de modo que

$$\rho_{ee} = -(\hbar + 1) i \rho_{ee} + \hbar i \rho_{gg}, \quad (2.3.18a)$$

$$\rho_{eg} = i \rho_{ge}^{\mathbb{C}*} = -\hbar + \frac{1}{2} i \rho_{eg}, \quad (2.3.18b)$$

$$\rho_{gg} = -\hbar i \rho_{gg} + (\hbar + 1) i \rho_{ee}, \quad (2.3.18c)$$

onde os elementos diagonais ρ_{ee} e ρ_{gg} correspondem às probabilidades do átomo ser encontrado nos níveis $|e\rangle$ (excitado) e $|g\rangle$ (fundamental) respectivamente. Somando-se as

equações (2.3.18a) e (2.3.18c) temos

$$\rho_{ee} + \rho_{gg} = 0, \quad (2.3.19)$$

logo $\rho_{ee}(t) + \rho_{gg}(t)$ é uma constante de movimento, o que era esperado uma vez que a soma das probabilidades é conservada, portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \rho_{ee}(t) + \rho_{gg}(t) = 1. \quad (2.3.20)$$

Temos como solução das equações (2.3.18)

$$\rho_{ee}(t) = \rho_{ee}(0)e^{-(2\bar{n}+1)\Gamma t} + \frac{\hbar}{2\hbar+1}(1 - e^{-(2\bar{n}+1)\Gamma t}) \quad (2.3.21a)$$

$$\rho_{eg}(t) = \rho_{eg}(0)e^{-(\bar{n}+1/2)\Gamma t} \quad (2.3.21b)$$

$$\rho_{gg}(t) = \rho_{gg}(0)e^{-(2\bar{n}+1)\Gamma t} + \frac{\hbar+1}{2\hbar+1}(1 - e^{-(2\bar{n}+1)\Gamma t}) \quad (2.3.21c)$$

Para o caso em que a temperatura é nula, temos $\hbar = 0$ e as equações (2.3.21) ficam escritas como

$$\rho_{ee}(t) = \rho_{ee}(0)e^{-\Gamma t}, \quad (2.3.22a)$$

$$\rho_{eg}(t) = \rho_{eg}(0)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}, \quad (2.3.22b)$$

$$\rho_{gg}(t) = 1 - \rho_{ee}(0)e^{-\Gamma t}. \quad (2.3.22c)$$

Podemos descrever o decaimento do estado do átomo considerando que este se encontra inicialmente um estado puro $|e\rangle$, sendo as componentes do operador densidade (probabilidades) iniciais

$$\rho_{ee}(0) = 1, \quad (2.3.23a)$$

$$\rho_{gg}(0) = 0. \quad (2.3.23b)$$

A probabilidade do átomo ser medido no estado fundamental ou no estado excitado em função do tempo estão representadas no gráfico (*figura 1*).

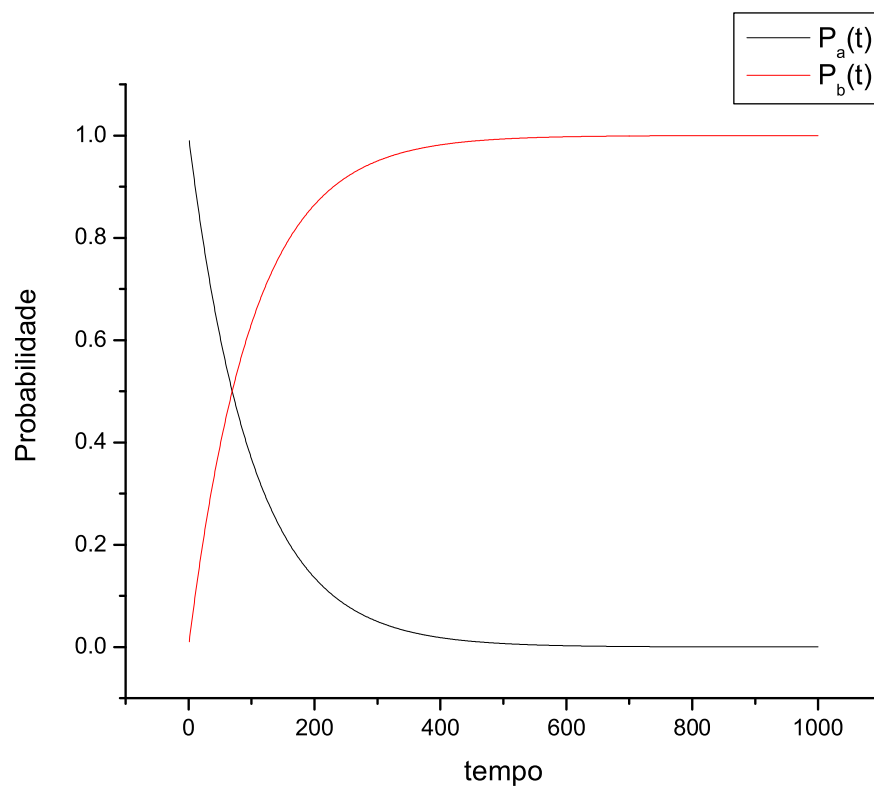


Figura 1: Probabilidade de ocupação dos estados excitado (P_a) e fundamental (P_b) em função do tempo.

Para escrevermos a equação mestra (2.3.16) na representação de Schrödinger aplicamos a transformação (2.2.12) e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i \frac{\omega_0}{2} [\sigma_z, \rho] - \frac{i}{2} \{ (\hbar(\omega_0) + 1) (\sigma_+ \sigma_- \rho - 2 \sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \hbar(\omega_0) (\sigma_- \sigma_+ \rho - 2 \sigma_+ \rho \sigma_- + \rho \sigma_- \sigma_+) \}. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

2.3.2 Reservatório de Vácuo Comprimido

Agora calcularemos a equação mestra para um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório de vácuo comprimido. O operador densidade que descreve este reservatório é representado por

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{R}} &= |\xi\rangle\langle\xi| \\ &= \prod_k \mathbf{S}_k(\xi) |0_k\rangle\langle 0_k| \mathbf{S}_k^\dagger(\xi), \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

sendo $\mathbf{S}_k(\xi) = e^{(\xi^* \mathbf{b}_{k+k_s} \mathbf{b}_{k-k_s} - \xi \mathbf{b}_{k+k_s}^\dagger \mathbf{b}_{k-k_s}^\dagger)}$ conhecido como operador de compressão, sendo k_s o número de onda do modo central, ξ o parâmetro de compressão $\xi = r e^{i\theta}$, onde r o fator de compressão e θ o ângulo associado à direção de compressão. Para o operador de compressão temos $\mathbf{S}_k^\dagger(\xi) = \mathbf{S}_k(-\xi)$.

Os valores médios $\langle \mathbf{b}_{k'} \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'} \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}}$, $\langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}}$ são

$$\langle \mathbf{b}_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} = 0 \quad (2.3.26a)$$

$$\langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = -e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) \delta_{k', 2k_s - k} \quad (2.3.26b)$$

$$\langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = -e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) \delta_{k', 2k_s - k} \quad (2.3.26c)$$

$$\langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = \sinh^2(r) \delta_{k, k'} \quad (2.3.26d)$$

$$\langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \cosh^2(r) \delta_{k, k'}. \quad (2.3.26e)$$

Substituindo os valores médios, equações (2.3.26), na equação (2.3.9), obtemos o seguinte

resultado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_k \frac{1}{2} |g_k|^2 \cosh^2(r) \int_0^t (e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} [\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + |g_k|^2 \cosh^2(r) \int_0^t (e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_+, \sigma_-]) dt' \\
& + |g_k|^2 \sinh^2(r) \int_0^t (e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} [\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + |g_k|^2 \sinh^2(r) \int_0^t (e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_-, \sigma_+]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s - k}| e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} \\
& \times \int_0^t (e^{i(\omega_0 - \omega_{2k_s - k})t'} [\sigma_+, \sigma_+ \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s - k}| e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) e^{i(\omega_0 - \omega_{2k_s - k})t} \\
& \times \int_0^t (e^{i(\omega_0 - \omega_k)t'} [\rho_{SI}(t') \sigma_+, \sigma_+]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s - k}| e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \\
& \times \int_0^t (e^{-i(\omega_0 - \omega_{2k_s - k})t'} [\sigma_-, \rho_{SI}(t') \sigma_-]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s - k}| e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) e^{-i(\omega_0 - \omega_{2k_s - k})t} \\
& \times \int_0^t (e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t'} [\rho_{SI}(t') \sigma_-, \sigma_-]) dt' .
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Agora, repetindo o mesmo procedimento realizado para o reservatório térmico, assumiremos que os modos do campo estão pouco espaçados de maneira que estes variam aproximadamente de forma contínua, e teremos as seguintes substituições

$$\begin{aligned}
\sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} & \longrightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 e^{i(\omega_0 - \omega')(t-t')} d\omega' \\
\sum_k |g_k| |g_{2k_s - k}| e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{2k_s - k})t'} & \longrightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')| |g(2\omega_s - \omega')| e^{2i(\omega_0 - \omega_s)t} \\
& \times e^{-i(\omega_0 - 2\omega_s + \omega')(t-t')} d\omega',
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

e a equaçao (2.3.27), na aproximaao de Markov, escreve-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 \cosh^2(r) [\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t)] \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& + |g(\omega')|^2 \cosh^2(r) [\rho_{SI}(t) \sigma_+, \sigma_-] \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& + |g(\omega')|^2 \sinh^2(r) [\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t)] \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& + |g(\omega')|^2 \sinh^2(r) [\rho_{SI}(t) \sigma_-, \sigma_+] \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& - |g(\omega')| |g(2\omega_s - \omega')| e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) [\sigma_+, \sigma_+ \rho_{SI}(t)] \\
& \times e^{2i(\omega_0 - \omega_s)t} \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - 2\omega_s + \omega')\tau} d\tau \\
& - |g(\omega')| |g(2\omega_s - \omega')| e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) [\rho_{SI}(t) \sigma_+, \sigma_+] \\
& \times e^{2i(\omega_0 - \omega_s)t} \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\
& - |g(\omega')| |g(2\omega_s - \omega')| e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) [\sigma_-, \rho_{SI}(t) \sigma_-] \\
& \times e^{-2i(\omega_0 - \omega_s)t} \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - 2\omega_s + \omega')\tau} d\tau \\
& - |g(\omega')| |g(2\omega_s - \omega')| e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) [\rho_{SI}(t) \sigma_-, \sigma_-] \\
& \times e^{-2i(\omega_0 - \omega_s)t} \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \quad d\omega'. \tag{2.3.29}
\end{aligned}$$

Substituindo a relaao (2.3.15) na equaçao (2.3.29) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & -\pi \mathcal{D}(\omega_0) |g(\omega_0)|^2 \cosh^2(r) ([\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t)] + [\rho_{SI}(t) \sigma_+, \sigma_-]) \\
& + \sinh^2(r) ([\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t)] + [\rho_{SI}(t) \sigma_-, \sigma_+]) \\
& + \pi \mathcal{D}(2\omega_s - \omega_0) |g(2\omega_s - \omega_0)| |g(\omega_0)| \sinh(r) \cosh(r) \\
& \times e^{i\theta} [\sigma_+, [\sigma_+, \rho_{SI}(t)]] e^{2i(\omega_0 - 2\omega_s)t} + e^{-i\theta} [\sigma_-, [\sigma_-, \rho_{SI}(t)]] e^{-2i(\omega_0 - 2\omega_s)t}, \tag{2.3.30}
\end{aligned}$$

onde agora consideraremos que a frequência central da compressao \mathbb{H} ressonante com a frequência de transiao atômica ($\omega_s \approx \omega_0$) e para simplificar a notaao omitiremos o indice \mathcal{S} , obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{2} \cosh^2(r) (\sigma_+ \sigma_- \rho_I - 2\sigma_- \rho_I \sigma_+ + \rho_I \sigma_+ \sigma_-) \\
& + \sinh^2(r) (\sigma_- \sigma_+ \rho_I - 2\sigma_+ \rho_I \sigma_- + \rho_I \sigma_- \sigma_+) \\
& + 2 \sinh(r) \cosh(r) (e^{i\theta} \sigma_+ \rho_I \sigma_+ + e^{-i\theta} \sigma_- \rho_I \sigma_-), \tag{2.3.31}
\end{aligned}$$

onde $j \equiv 2\pi \mathcal{D}(\omega_0) |g(\omega_0)|^2$.

Voltando para representação de Schrödinger temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = & -i \frac{\omega_0}{2} [\sigma_z, \rho] - \frac{i}{2} \cosh^2(r) (\sigma_+ \sigma_- \rho - 2 \sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \sinh^2(r) (\sigma_- \sigma_+ \rho - 2 \sigma_+ \rho \sigma_- + \rho \sigma_- \sigma_+) \\ & + 2 \sinh(r) \cosh(r) (e^{i(2\omega_0 t + \theta)} \sigma_+ \rho \sigma_+ + e^{-i(2\omega_0 t + \theta)} \sigma_- \rho \sigma_-) \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Para o caso particular em que a compressão é nula, ou seja, $r = 0$, a equação (2.3.32) se reduz a equação mestra para um átomo em um reservatório térmico com temperatura nula.

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i \frac{\omega_0}{2} [\sigma_z, \rho] - \frac{i}{2} \{ (\sigma_+ \sigma_- \rho - 2 \sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_+ \sigma_-) \}, \quad (2.3.33)$$

identica a equação (2.3.24), com número médio de fônons térmicos igual a zero.

3 *Equação Mestra para o átomo de dois níveis bombeado por um campo eletromagnético clássico*

Neste capítulo apresentaremos a equação mestra de um sistema constituído de um átomo de dois níveis sob a acção de um campo eletromagnético clássico de frequência ω_L e frequência de Rabi F . A dessintonia entre a frequência do campo e a transição atômica é $2\delta = \omega_0 - \omega_L$, sendo o diagrama de níveis descrito pela Figura (2).

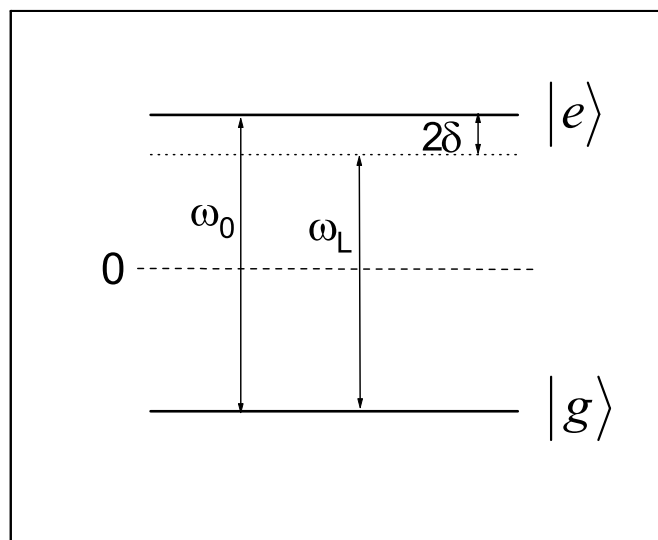


Figura 2: *Diagrama de níveis.*

O sistema átomo campo clássico, interagindo com um reservatório de radiação, nas

aproximações de dipolo e de onda girante, é descrito pelo seguinte hamiltoniano

$$\mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + F \left(\sigma_+ e^{-i(\omega_L t + \varphi)} + \sigma_- e^{i(\omega_L t + \varphi)} \right) + \sum_k \omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k + \sum_k \left(g_k \mathbf{b}_k \sigma_+ + g_k^* \mathbf{b}_k^\dagger \sigma_- \right), \quad (3.0.1)$$

onde $F = \mu|E|$, sendo μ o momento de dipolo atômico, $|E|$ a amplitude do campo elétrico da onda incidente e φ sua fase.

Com a finalidade de escrever a equação mestra, primeiramente efetuamos uma transformação unitária $U = e^{-i\frac{\omega_L}{2}\sigma_z t}$ na equação de Schrödinger,

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} |\psi\rangle. \quad (3.0.2)$$

Esta transformação leva a uma nova equação de Schrödinger, com

$$|\psi\rangle = U^\dagger |\psi\rangle, \quad (3.0.3)$$

e obtemos o hamiltoniano para este referencial girante de frequência ω_L , escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} &= U \mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} U^\dagger - U \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} \\ &= \delta \sigma_z + F \left(\sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi} \right) + \sum_k \omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k + \sum_k \left(g_k \mathbf{b}_k \sigma_+ e^{i\omega_L t} + g_k^* \mathbf{b}_k^\dagger \sigma_- e^{-i\omega_L t} \right). \end{aligned} \quad (3.0.4)$$

Retirando assim, a dependência temporal da parte livre do hamiltoniano.

Para facilitar o cálculo da equação mestra introduzimos novos operadores, para $\omega_0 \geq \omega_L$, sendo

$$\sigma_0 = \frac{1}{\mathcal{C}} \left(\delta \sigma_0 + F (\sigma_- e^{i\varphi} + \sigma_+ e^{-i\varphi}) \right) \quad (3.0.5a)$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2\mathcal{C}} \left((\delta + \mathcal{C}) \sigma_- e^{i\varphi} - F \sigma_0 + (\delta - \mathcal{C}) \sigma_+ e^{-i\varphi} \right) \quad (3.0.5b)$$

$$\sigma_+ = \frac{1}{2\mathcal{C}} \left((\delta - \mathcal{C}) \sigma_- e^{i\varphi} - F \sigma_0 + (\delta + \mathcal{C}) \sigma_+ e^{-i\varphi} \right), \quad (3.0.5c)$$

que satisfazem as regras de comutação da álgebra do grupo SU(2)

$$[\sigma_0, \sigma_+] = 2\sigma_+ \quad (3.0.6a)$$

$$[\sigma_0, \sigma_-] = -2\sigma_- \quad (3.0.6b)$$

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_0. \quad (3.0.6c)$$

Podemos escrever estes novos operadores de forma compacta,

$$\sigma_j = \prod_{l=-1}^j c_{jl} \sigma_l e^{-il\varphi}, \quad (3.0.7)$$

para $j = -1, 0, 1$ onde

$$C = \frac{1}{2\Phi} \begin{pmatrix} \delta + \Phi & -F & \delta - \Phi \\ 2F & 2\delta & 2F \\ \delta - \Phi & -F & \delta + \Phi \end{pmatrix}, \quad (3.0.8)$$

e

$$\Phi = \sqrt{\delta^2 + F^2}. \quad (3.0.9)$$

Os operadores σ_+ e σ_- são escritos a partir dos operadores (3.0.5) como

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= e^{i\varphi} \prod_{j=-1}^1 C_j \sigma_j \\ \sigma_- &= e^{-i\varphi} \prod_{j=-1}^1 C_j \sigma_{-j}, \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{\delta - \Phi}{2\Phi} \\ C_0 &= \frac{F}{2\Phi} \\ C_1 &= \frac{\delta + \Phi}{2\Phi}, \end{aligned}$$

é fácil verificar que para o caso em que $F \rightarrow 0$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{F \rightarrow 0} \sigma_- &= e^{-i\varphi} \sigma_- \\ \lim_{F \rightarrow 0} \sigma_0 &= \sigma_0 \\ \lim_{F \rightarrow 0} \sigma_+ &= e^{i\varphi} \sigma_+. \end{aligned} \quad (3.0.11)$$

Com os operadores σ_- , σ_0 e σ_+ , o hamiltoniano (3.0.4) é escrito em uma forma mais conveniente para efetuarmos o cálculo da equação mestra,

$$\mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} = \Phi \sigma_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k + \sum_k \prod_{j=-1}^1 |g_k| C_j \mathbf{b}_k \sigma_j e^{i(\omega_L t + \varphi)} + \mathbf{b}_k^\dagger \sigma_{-j} e^{-i(\omega_L t + \varphi)}. \quad (3.0.12)$$

Vamos reescrever a equação de Schrödinger na representação de interação, de maneira que o termo de interação (3.0.12) se torna

$$\mathbf{H}_I = \sum_k \sum_{j=-1}^3 |g_k| C_j \mathbf{b}_k \boldsymbol{\sigma}_j e^{i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + \varphi} + \mathbf{b}_k^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{-j} e^{-i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + \varphi} \quad (3.0.13)$$

Repetindo o procedimento apresentado na seção (2.2) para o hamiltoniano (3.0.13) temos a seguinte equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & \sum_k \sum_{j=-1}^3 |g_k| C_j \left[-ie^{i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + \varphi} \langle \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_j, \rho_{SI}(0)] + h.c. \right] \\ & - \sum_{k,k'} \sum_{j,j'=-1}^3 C_j C_{j'} |g_k| |g_{k'}| \\ & \times \int_t^0 (e^{i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + 2\varphi} e^{i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_{j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + 2\varphi} e^{i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'} \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_{j'}, \boldsymbol{\sigma}_j]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{-i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + 2\varphi} e^{-i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_{-j'}, \boldsymbol{\sigma}_{-j}]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{-i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t + 2\varphi} e^{-i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_{-j}, \boldsymbol{\sigma}_{-j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t} e^{-i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_{-j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{-i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t} e^{i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_{j'}, \boldsymbol{\sigma}_{-j}]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{-i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t} e^{i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\sigma}_{-j}, \boldsymbol{\sigma}_{j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\ & + \int_t^0 (e^{i(\omega_L + 2j\Delta - \omega_k)t} e^{-i(\omega_L + 2j'\Delta - \omega_{k'})t'} \langle \mathbf{b}_{k'}^\dagger \mathbf{b}_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \boldsymbol{\sigma}_{-j'}, \boldsymbol{\sigma}_j]) dt' \quad (3.0.14) \end{aligned}$$

A seguir particularizaremos esta equação mestra para dois tipos de reservatório, o térmico e o de vácuo comprimido.

3.1 Reservatório Térmico

Para obtermos a equação mestra para um reservatório térmico, substituímos os valores médios (2.3.11) na equação (3.0.14), de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_k \sum_{j,j'=-1}^{\infty} C_j C_{j'} |g_k|^2 e^{i(j-j')2\Delta t} \hbar_k^{\frac{1}{2}} \int_0^t (e^{i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_{-j'}, \sigma_j]) dt' \\
& + e^{-i(j-j')2\Delta t} (\hbar_k + 1) \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_{j'}, \sigma_{-j}]) dt' \\
& + e^{-i(j-j')2\Delta t} \hbar_k \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\sigma_{-j}, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + e^{i(j-j')2\Delta t} (\hbar_k + 1) \int_0^t (e^{i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\sigma_j, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t')]) dt' . \quad (3.1.1)
\end{aligned}$$

Fazendo a aproximação markoviana e repetindo os procedimentos realizados na subseção (2.3.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_{j,j'=-1}^{\infty} C_j C_{j'} \int_{j'}^{\infty} e^{i(j-j')2\Delta t} (\hbar + 1) [\sigma_j, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t)] \\
& + e^{-i(j-j')2\Delta t} (\hbar + 1) [\rho_{SI}(t) \sigma_{j'}, \sigma_{-j}] + e^{-i(j-j')2\Delta t} \hbar [\sigma_{-j}, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t)] \\
& + e^{i(j-j')2\Delta t} \hbar [\rho_{SI}(t) \sigma_{-j'}, \sigma_j] , \quad (3.1.2)
\end{aligned}$$

onde

$$\int_{j'}^{\infty} \equiv 2\pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)|^2. \quad (3.1.3)$$

Voltando a representação de Schrödinger no referencial girante de frequência ω_L e omitindo o subíndice S , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\delta \sigma_0 + F \int_{j'}^{\infty} \sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi} \int_{j'}^{\infty}, \rho] - \sum_{j,j'=-1}^{\infty} C_j C_{j'} \frac{j'}{2} \{ (\hbar + 1) [\sigma_j, \sigma_{-j'} \rho] \\
& + (\hbar + 1) [\rho \sigma_{j'}, \sigma_{-j}] + \hbar [\sigma_{-j}, \sigma_{j'} \rho] + \hbar [\rho \sigma_{-j'}, \sigma_j] \}. \quad (3.1.4)
\end{aligned}$$

Efetuada a soma em j , utilizando a equação (3.0.10), reescrevemos a equação (3.1.4) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\delta \sigma_0 + F \int_{j'}^{\infty} \sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi} \int_{j'}^{\infty}, \rho] - \sum_{j,j'=-1}^{\infty} C_{j'} \frac{j'}{2} (\hbar + 1) e^{-i\varphi} [\sigma_+, \sigma_{-j'} \rho] \\
& + (\hbar + 1) e^{i\varphi} [\rho \sigma_{j'}, \sigma_-] + \hbar e^{i\varphi} [\sigma_-, \sigma_{j'} \rho] + \hbar e^{-i\varphi} [\rho \sigma_{-j'}, \sigma_+] , \quad (3.1.5)
\end{aligned}$$

e substituindo (3.0.7) em (3.1.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\delta \sigma_0 + F \sum_{j',l=-1}^{\infty} C_{j'l} \frac{i^{j'}}{2} (\hbar + 1) e^{-i(1-l)\varphi} [\sigma_+, \sigma_{-l} \rho] \\ & + (\hbar + 1) e^{i(1-l)\varphi} [\rho \sigma_l, \sigma_-] + \hbar e^{i(1+l)\varphi} [\sigma_-, \sigma_l \rho] + \hbar e^{-i(1-l)\varphi} [\rho \sigma_{-l}, \sigma_+]^a. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Efetuada a soma em j' , e definindo

$$\tilde{\Gamma}_l = \sum_{j',l=-1}^{\infty} C_{j'l} i^{j'}, \quad (3.1.7)$$

a equação (3.1.6) fica escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\delta \sigma_0 + F \sum_{j',l=-1}^{\infty} C_{j'l} \frac{i^{j'}}{2} (\hbar + 1) e^{-i(1-l)\varphi} [\sigma_+, \sigma_{-l} \rho] \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \{ (\hbar + 1) [\sigma_+, \sigma_- \rho] + \hbar [\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \} \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} (\hbar + 1) e^{-i\varphi} [\sigma_+, \sigma_0 \rho] + \hbar e^{i\varphi} [\sigma_-, \sigma_0 \rho] + h.c.^a \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} (\hbar + 1) e^{-i2\varphi} [\sigma_+, \sigma_+ \rho] + \hbar e^{i2\varphi} [\sigma_-, \sigma_- \rho] + h.c.^a, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_+ = \frac{1}{4\Phi^2} (\Phi - \delta)^2 i_- + 2(\Phi^2 - \delta^2) i_0 + (\Phi + \delta)^2 i_+^a \quad (3.1.9a)$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = -\frac{F}{4\Phi^2} \{ (\Phi - \delta) i_- - 2\delta i_0 - (\Phi + \delta) i_+ \} \quad (3.1.9b)$$

$$\tilde{\Gamma}_- = -\frac{F}{2\Phi} \{ i_- - 2i_0 + i_+ \}. \quad (3.1.9c)$$

Note-se que no limite de $F \rightarrow 0$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_+ & = i_- = 2\pi \mathcal{D}(\omega_0) |g(\omega_0)|^2 \\ \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_0 & = 0 \\ \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_- & = 0 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

e a equação mestra (3.1.8) recai na equação mestra (2.3.24) apresentada na subseção (2.3.1) no referencial girante de frequência ω_L ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[\delta \sigma_0, \rho] - \frac{i}{2} \{ (\hbar + 1) [\sigma_+, \sigma_- \rho] + \hbar [\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \} \quad (3.1.11)$$

que o acoplamento átomo-campo descrito por $|g(\omega)|$ é constante, ou seja, é independente da frequência, desta maneira temos

$$\Gamma_+ = \Gamma_0 = \Gamma_- = \Gamma. \quad (3.1.12)$$

Esta consideração leva aos mesmos resultados para $\tilde{\Gamma}_+$, $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_-$ em (3.1.10), e a equação mestra escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\delta\sigma_0 + F(\sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi}), \rho] \\ & - \frac{i}{2} \{(\hbar + 1)[\sigma_+, \sigma_- \rho] + \hbar[\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c.\}, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

mas desta vez o campo clássico está presente no termo do hamiltoniano que governa a evolução livre, não influenciando o processo de dissipação.

3.2 Reservatório de Vácuo Comprimido

Agora calcularemos a equação mestra (3.0.14) considerando um reservatório de vácuo comprimido. Primeiramente substituímos os valores médios (2.3.26) na equação (3.0.14), de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_{k, j, j'=-1}^{\infty} C_j C_{j'} |g_k|^2 \cosh^2(r) e^{i(j-j')2\Delta t} \\
& \times \int_0^t (e^{i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\sigma_j, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + |g_k|^2 \cosh^2(r) e^{-i(j-j')2\Delta t} \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_{j'}, \sigma_{-j}]) dt' \\
& + |g_k|^2 \sinh^2(r) e^{-i(j-j')2\Delta t} \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\sigma_{-j}, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& + |g_k|^2 \sinh^2(r) e^{i(j-j')2\Delta t} \int_0^t (e^{i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_{-j'}, \sigma_j]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s-k}| e^{i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_{k_s})t} \\
& \times \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-2\omega_{k_s}+\omega_k)(t-t')} [\sigma_j, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t')]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s-k}| e^{i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_{k_s})t} \\
& \times \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_{j'}, \sigma_j]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s-k}| e^{-i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{-2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_{k_s})t} \\
& \times \int_0^t (e^{i(\omega_L+2j'\Delta-\omega_k)(t-t')} [\rho_{SI}(t') \sigma_{-j'}, \sigma_{-j}]) dt' \\
& - |g_k| |g_{2k_s-k}| e^{i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_{k_s})t} \\
& \times \int_0^t (e^{-i(\omega_L+2j'\Delta-2\omega_{k_s}+\omega_k)(t-t')} [\sigma_{-j}, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t')]) dt' .
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Fazendo a aproximação markoviana e integrando a equação (3.2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_{j,j'=-1}^{\infty} C_j C_{j'} \pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)|^2 \cosh^2(r) \\
& \times e^{i(j-j')2\Delta t} [\sigma_j, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t)] \\
& + \pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)|^2 \cosh^2(r) e^{-i(j-j')2\Delta t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{j'}, \sigma_{-j}] \\
& + \pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)|^2 \sinh^2(r) e^{-i(j-j')2\Delta t} [\sigma_{-j}, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t)] \\
& + \pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)|^2 \sinh^2(r) e^{i(j-j')2\Delta t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{-j'}, \sigma_j] \\
& - \pi \mathcal{D}(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi) |g(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi)| |g(\omega_L + 2j'\Phi)| e^{i(2\varphi+\theta)} \\
& \times \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\sigma_j, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t)] \\
& - \pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)| |g(2\omega_s - \omega_L + 2j'\Phi)| e^{i(2\varphi+\theta)} \\
& \times \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{j'}, \sigma_j] \\
& - \pi \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) |g(\omega_L + 2j'\Phi)| |g(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi)| e^{-i(2\varphi+\theta)} \\
& \times \sinh(r) \cosh(r) e^{-2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{-j'}, \sigma_{-j}] \\
& - \pi \mathcal{D}(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi) |g(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi)| |g(\omega_L + 2j'\Phi)| e^{i(2\varphi+\theta)} \\
& \times \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\sigma_{-j}, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t)] . \tag{3.2.2}
\end{aligned}$$

Agora consideraremos a hipótese de que a distribuição de modos é praticamente constante, ou seja, $\mathcal{D}(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi) = \mathcal{D}(\omega_L + 2j'\Phi) \equiv \mathcal{D}$, dessa maneira a equação (3.2.2) fica escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} = & - \sum_{j,j'=-1}^{\infty} C_j C_{j'} \frac{1}{2} \cosh^2(r) e^{i(j-j')2\Delta t} [\sigma_j, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t)] \\
& + \frac{i j'}{2} \cosh^2(r) e^{-i(j-j')2\Delta t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{j'}, \sigma_{-j}] \\
& + \frac{i j'}{2} \sinh^2(r) e^{-i(j-j')2\Delta t} [\sigma_{-j}, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t)] \\
& + \frac{i j'}{2} \sinh^2(r) e^{i(j-j')2\Delta t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{-j'}, \sigma_j] \\
& - \frac{i j'}{2} e^{i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\sigma_j, \sigma_{j'} \rho_{SI}(t)] \\
& - \frac{i j'}{2} e^{i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{j'}, \sigma_j] \\
& - \frac{i j'}{2} e^{-i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{-2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\rho_{SI}(t) \sigma_{-j'}, \sigma_{-j}] \\
& - \frac{i j'}{2} e^{-i(2\varphi+\theta)} \sinh(r) \cosh(r) e^{-2i(\omega_L+(j+j')\Delta-\omega_s)t} [\sigma_{-j}, \sigma_{-j'} \rho_{SI}(t)] . \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} i_{j'} &\equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_L + 2j'\Phi)|^2 \\ i'_{j'} &\equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_L + 2j'\Phi)||g(2\omega_s - \omega_L - 2j'\Phi)|. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Voltando, a representação de Schrödinger no referencial girante de frequência ω_L e repetindo o mesmo procedimento da seção (3.1), a equação mestra torna-se em sua forma final escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -i[\delta\sigma_0 + F(i\sigma_+e^{-i\varphi} + \sigma_-e^{i\varphi}), \rho] \\ &- \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \cosh^2(r)[\sigma_+, \sigma_- \rho] + \sinh^2(r)[\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \\ &- \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} i \cosh^2(r)e^{-i\varphi}[\sigma_+, \sigma_0 \rho] + \sinh^2(r)e^{i\varphi}[\sigma_-, \sigma_0 \rho] + h.c. \\ &- \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} i \cosh^2(r)e^{-i2\varphi}[\sigma_+, \sigma_+ \rho] + \sinh^2(r)e^{i2\varphi}[\sigma_-, \sigma_- \rho] + h.c. \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}'_+}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i\theta} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_+, \rho]] + h.c. \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}'_0}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i(\varphi + \theta)} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_0, \rho]] + h.c. \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}'_-}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i(2\varphi + \theta)} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_-, \rho]] + h.c. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_+ = \frac{1}{4\Phi^2} (\Phi - \delta)^2 i_- + 2(\Phi^2 - \delta^2) i_0 + (\Phi + \delta)^2 i_+ \quad (3.2.6a)$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = -\frac{F}{4\Phi^2} \{(\Phi - \delta) i_- - 2\delta i_0 - (\Phi + \delta) i_+\} \quad (3.2.6b)$$

$$\tilde{\Gamma}_- = -\frac{F}{2\Phi} \{i_- - 2i_0 + i_+\}, \quad (3.2.6c)$$

e

$$\tilde{\Gamma}'_+ = \frac{1}{4\Phi^2} (\Phi - \delta)^2 i'_- + 2(\Phi^2 - \delta^2) i'_0 + (\Phi + \delta)^2 i'_+ \quad (3.2.7a)$$

$$\tilde{\Gamma}'_0 = -\frac{F}{4\Phi^2} \{(\Phi - \delta) i'_- - 2\delta i'_0 - (\Phi + \delta) i'_+\} \quad (3.2.7b)$$

$$\tilde{\Gamma}'_- = -\frac{F}{2\Phi} \{i'_- - 2i'_0 + i'_+\}. \quad (3.2.7c)$$

Pode-se verificar que tomando limite $F \rightarrow 0$ temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{F \rightarrow 0} \Phi &= \delta \\
 \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_+ &= i = 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0)|^2 & \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}'_+ &= i' = 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0)||g(2\omega_s - \omega_0)| \\
 \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_0 &= 0 & \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}'_0 &= 0 \\
 \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_- &= 0 & \lim_{F \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}'_- &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

e a equação mestra (3.2.5) simplifica-se para

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -i\delta[\sigma_0, \rho] - \frac{i}{2} \cosh^2(r)[\sigma_+, \sigma_- \rho] + \sinh^2(r)[\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \\
 &+ \frac{i'}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{i\theta} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_+, \rho]] + h.c.
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Para o caso ressonante $\omega_s = \omega_0$, a frequência central da compressão é igual à frequência de transição atômica, a equação (3.2.9) se reduz à equação mestra de um átomo de dois níveis em reservatório de vácuo comprimido, no referencial girante de frequência ω_L .

Quando o acoplamento átomo-campo, descrito por $|g(\omega)|$, é constante, ou seja, independente da frequência, teremos as seguintes relações entre as constantes de decaimento

$$i_+ = i_0 = i_- = i'_+ = i'_0 = i'_- \equiv i. \tag{3.2.10}$$

Esta consideração leva a uma equação mestra para o átomo de dois níveis em reservatório de vácuo comprimido,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -i[\delta\sigma_0 + F(\sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi}), \rho] \\
 &- \frac{i}{2} \cosh^2(r)[\sigma_+, \sigma_- \rho] + \sinh^2(r)[\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \\
 &+ \frac{i'}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{i\theta} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_+, \rho]] + h.c.,
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

onde o campo clássico está presente apenas no termo do hamiltoniano que governa a evolução livre, não influenciando o processo de dissipação.

4 *Equação mestra não linear para um átomo à partir da equação mestra linear para N átomos na aproximação de campo médio*

Neste capítulo apresentamos primeiramente a equação mestra linear para um conjunto de N átomos de dois níveis interagindo com um reservatório, a partir da qual calcularemos a equação mestra para um único átomo na aproximação de campo médio.

4.1 *Equação mestra linear para N átomos de dois níveis*

Estamos interessados em descrever um sistema constituído de N átomos de dois níveis interagindo com um reservatório. Estes átomos estão bastante espaçados, ou seja, a densidade de átomos é consideravelmente baixa, de modo que a interação direta átomo-átomo é desprezada.

O hamiltoniano que descreve um conjunto de N átomos interagindo com um reservatório (conjunto de osciladores) é dado por ^[18, 26]

$$H_{S+\mathcal{R}} = \frac{\omega_0}{2} S_0 + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k (g_k b_k S_+ + g_k^* b_k^\dagger S_-), \quad (4.1.1)$$

onde

$$\mathbf{S}_+ = \sum_{i=1}^N \sigma_+(i) \quad (4.1.2a)$$

$$\mathbf{S}_0 = \sum_{i=1}^N \sigma_0(i) \quad (4.1.2b)$$

$$\mathbf{S}_- = \sum_{i=1}^N \sigma_-(i), \quad (4.1.2c)$$

são operadores coletivos, que continuam satisfazendo as relações de comutação da álgebra associada ao grupo SU(2), como podemos facilmente verificar

$$[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_+] = \sum_{i,i'=1}^N [\sigma_0(i), \sigma_+(i)] = 2 \sum_{i,i'=1}^N \sigma_+(i) \delta_{ii'} = 2\mathbf{S}_+ \quad (4.1.3a)$$

$$[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_-] = \sum_{i,i'=1}^N [\sigma_0(i), \sigma_-(i)] = -2 \sum_{i,i'=1}^N \sigma_-(i) \delta_{ii'} = -2\mathbf{S}_- \quad (4.1.3b)$$

$$[\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-] = \sum_{i,i'=1}^N [\sigma_+(i), \sigma_-(i)] = \sum_{i,i'=1}^N \sigma_0(i) \delta_{ii'} = 2\mathbf{S}_0. \quad (4.1.3c)$$

No termo de interação átomo-reservatório supõe-se que cada oscilador k interage com todos os átomos, com a mesma intensidade $|g_k|$.

A estrutura da equação mestra para este conjunto de átomos é idêntica àquela apresentada no capítulo (2) na seção (2.3). Aqui trocamos os operadores σ_+ , σ_0 , σ_- pelos operadores coletivos \mathbf{S}_+ , \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_- , respectivamente, de maneira que, para o reservatório térmico, a equação mestra para N átomos escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_N}{\partial t} = & -i \frac{\omega_0}{2} [\mathbf{S}_0, \rho_N] - \frac{i}{2} \{ (\hbar(\omega_0) + 1) ([\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \rho_N] - [\mathbf{S}_-, \rho_N \mathbf{S}_+]) \\ & + \hbar(\omega_0) ([\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \rho_N] - [\mathbf{S}_+, \rho_N \mathbf{S}_-]) \}, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

onde agora ρ_N é o operador densidade para N átomos,

$$\rho_N \equiv \rho_N(1, 2, 3, \dots, N-1, N). \quad (4.1.5)$$

De maneira semelhante podemos escrever a equação mestra para N átomos interagindo

com um reservatório de vácuo comprimido,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_N}{\partial t} = & -i \frac{\omega_0}{2} [\mathbf{S}_0, \rho_N] - \frac{i}{2} \cosh^2(r) \{[\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \rho_N] - [\mathbf{S}_-, \rho_N \mathbf{S}_+]\} \\ & - \frac{i}{2} \sinh^2(r) \{[\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \rho_N] - [\mathbf{S}_+, \rho_N \mathbf{S}_-]\} \\ & + \frac{i}{2} \sinh(r) \cosh(r) \{ e^{i\theta} e^{-2i\omega_0 t} [\mathbf{S}_+, [\mathbf{S}_+, \rho_N]] + e^{-i\theta} e^{2i\omega_0 t} [\mathbf{S}_-, [\mathbf{S}_-, \rho_N]] \}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

O sistema de N átomos de dois níveis sob influência de um campo eletromagnético monocromático clássico de frequência ω_L , pode ser descrito pelo seguinte hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{S+\mathcal{R}} = & \frac{\omega_0}{2} \mathbf{S}_0 + F \{ \mathbf{S}_+ e^{-i(\omega_L t + \varphi)} + \mathbf{S}_- e^{i(\omega_L t + \varphi)} \} + \sum_k \omega_k \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_k \\ & + \sum_k g_k \mathbf{b}_k \mathbf{S}_+ + g_k^* \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{S}_-. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

No referencial girante com frequência ω_L , as equações mestras apresentadas no capítulo (3), para N átomos, podem ser escritas da seguinte maneira

Para o reservatório térmico

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_N}{\partial t} = & -i [\delta \mathbf{S}_0 + F \{ \mathbf{S}_+ e^{-i\varphi} + \mathbf{S}_- e^{i\varphi} \}, \rho_N] \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} (\hbar + 1) \{ [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \rho_N] + [\rho_N \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-] \} \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \hbar \{ [\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \rho_N] + [\rho_N \mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+] \} \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} (\hbar + 1) \{ e^{-i\varphi} [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_0 \rho_N] + e^{i\varphi} [\rho_N \mathbf{S}_0, \mathbf{S}_-] \}^a \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} \hbar \{ e^{i\varphi} [\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_0 \rho_N] + e^{-i\varphi} [\rho_N \mathbf{S}_0, \mathbf{S}_+] \}^a \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} (\hbar + 1) \{ e^{-i2\varphi} [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_+ \rho_N] + e^{i2\varphi} [\rho_N \mathbf{S}_-, \mathbf{S}_-] \}^a \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} \hbar \{ e^{i2\varphi} [\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_- \rho_N] + e^{-i2\varphi} [\rho_N \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_+] \}^a \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Para o reservatório de vácuo comprimido

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = & -i[\delta \mathbf{S}_0 + F \{ \mathbf{S}_+ e^{-i\varphi} + \mathbf{S}_- e^{i\varphi} \}, \rho_N] \\
& - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \cosh^2(r) \{ [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \rho_N] - [\mathbf{S}_-, \rho_N \mathbf{S}_+] \} \\
& - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \sinh^2(r) \{ [\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \rho_N] - [\mathbf{S}_+, \rho_N \mathbf{S}_-] \} \\
& - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} \cosh^2(r) \{ e^{-i\varphi} [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_0 \rho_N] - e^{i\varphi} [\mathbf{S}_-, \rho_N \mathbf{S}_0] \} \\
& - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} \sinh^2(r) \{ e^{i\varphi} [\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_0 \rho_N] - e^{-i\varphi} [\mathbf{S}_+, \rho_N \mathbf{S}_0] \} \\
& - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} \cosh^2(r) \{ e^{-2i\varphi} [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_+ \rho_N] - e^{2i\varphi} [\mathbf{S}_-, \rho_N \mathbf{S}_-] \} \\
& - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} \sinh^2(r) \{ e^{2i\varphi} [\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_- \rho_N] - e^{-2i\varphi} [\mathbf{S}_+, \rho_N \mathbf{S}_+] \} \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}'_+}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{i\theta} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\mathbf{S}_+, [\mathbf{S}_+, \rho_N]] \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}'_+}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{-i\theta} e^{-2i(\omega_L - \omega_s)t} [\mathbf{S}_-, [\mathbf{S}_-, \rho_N]] \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}'_0}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{i(\varphi + \theta)} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\mathbf{S}_+, [\mathbf{S}_0, \rho_N]] \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}'_0}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{-i(\varphi + \theta)} e^{-2i(\omega_L - \omega_s)t} [\mathbf{S}_-, [\mathbf{S}_0, \rho_N]] \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}'_-}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{i(2\varphi + \theta)} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\mathbf{S}_+, [\mathbf{S}_-, \rho_N]] \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}'_-}{2} \sinh(r) \cosh(r) e^{-i(2\varphi + \theta)} e^{-2i(\omega_L - \omega_s)t} [\mathbf{S}_-, [\mathbf{S}_+, \rho_N]]. \tag{4.1.9}
\end{aligned}$$

As equações (4.1.8) e (4.1.9) serão o ponto de partida para obtenção de equações mestras não lineares para um único átomo na aproximação de campo médio.

4.2 Equação mestra não linear

Nesta seção, apresentaremos as equações mestras não lineares, para um único átomo

$N - K$ átomos do sistema,

$$\begin{aligned} \rho_K &= \text{Tr}_{\times_{m_{K+1}} \times_{m_{K+2}} \dots \times_{m_{N-1}} \times_{m_N}} (\rho_N) \\ &\equiv \dots \langle m_{K+1}, m_{K+2}, \dots, m_{N-1}, m_N | \rho_N | m_{K+1}, m_{K+2}, \dots, m_{N-1}, m_N \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Desta forma podemos definir a equação mestra para K átomos aplicando a operação de traço na equação mestra para N átomos

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial t} = \text{Tr}_{K+1, \dots, N} \left[\frac{\partial \rho_N}{\partial t} \right]. \quad (4.2.2)$$

Partindo da equação mestra linear para N átomos de dois níveis, equação (4.1.8), obteremos uma equação mestra não linear para K átomos de dois níveis sob influência de um campo monocromático clássico, em reservatório térmico. Substituindo a equação (4.1.8) no lado direito da equação (4.2.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_K}{\partial t} &= \text{Tr}_{K+1, \dots, N} \left[\frac{\partial \rho_N}{\partial t} \right] \\ &= -i \text{Tr}_{K+1, \dots, N} \left[\delta[\mathbf{S}_0, \rho_N] + F e^{-i\varphi} [\mathbf{S}_+, \rho_N] + F e^{i\varphi} [\mathbf{S}_-, \rho_N] \right] \\ &\quad - \frac{\tilde{\Gamma}^+}{2} (\hbar + 1) \{ \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \rho_N]) + \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\rho_N \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-]) \} \\ &\quad - \frac{\tilde{\Gamma}^+}{2} \hbar \{ \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \rho_N]) + \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\rho_N \mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+]) \} \\ &\quad - \frac{\tilde{\Gamma}_0^+}{2} (\hbar + 1) e^{-i\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_0 \rho_N]) + e^{i\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\rho_N \mathbf{S}_0, \mathbf{S}_-]) \\ &\quad - \frac{\tilde{\Gamma}_0^+}{2} \hbar e^{i\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_0 \rho_N]) + e^{-i\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\rho_N \mathbf{S}_0, \mathbf{S}_+]) \\ &\quad - \frac{\tilde{\Gamma}^-}{2} (\hbar + 1) e^{-i2\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_+ \rho_N]) + e^{i2\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\rho_N \mathbf{S}_-, \mathbf{S}_-]) \\ &\quad - \frac{\tilde{\Gamma}^-}{2} \hbar e^{i2\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_- \rho_N]) + e^{-i2\varphi} \text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\rho_N \mathbf{S}_+, \mathbf{S}_+]) . \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Observando a equação (4.2.3), percebemos que o lado direito desta contém as seguintes operações

$$\text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_\lambda, \rho_N]) \quad (4.2.4a)$$

$$\text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_\lambda, \mathbf{S}_{\lambda'} \rho_N]) \quad (4.2.4b)$$

$$\text{Tr}_{K+1, \dots, N} ([\mathbf{S}_\lambda, \rho_N \mathbf{S}_{\lambda'}]), \quad (4.2.4c)$$

com $\lambda = -1, 0, 1$, $\lambda' = -1, 0, 1$; portanto, devemos calcular cada uma das expressões

(4.2.4), para obtermos o lado direito da equação (4.2.3).

Calculando a operação (4.2.4a) temos

$$\begin{aligned}
 Tr_{K+1, \dots, N}([\mathbf{S}_\lambda, \boldsymbol{\rho}_N]) &= Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=1}^N [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_N] \\
 &= \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), Tr_{K+1, \dots, N}(\boldsymbol{\rho}_N)] + \sum_{i=K+1}^N Tr_{K+1, \dots, N}([\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_N]) \\
 &= \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_K] + \sum_{i=K+1}^N Tr_{K+1, \dots, N}([\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_N]). \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

Desevolvendo o segundo termo do lado direito da equação (4.2.5)

$$\sum_{i=K+1}^N Tr_{K+1, \dots, N}([\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_N]) = Tr_{K+1, \dots, N}([\boldsymbol{\sigma}_\lambda(K+1) + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\lambda(N), \boldsymbol{\rho}_N]), \quad (4.2.6)$$

podemos perceber que todos os termos são equivalentes, pois os \mathfrak{S} tomos são idênticos, então,

$$\sum_{i=K+1}^N Tr_{K+1, \dots, N}([\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_N]) = (N - K) Tr_{K+1, \dots, N}([\boldsymbol{\sigma}_\lambda(K+1), \boldsymbol{\rho}_{K+1}]), \quad (4.2.7)$$

onde, $\boldsymbol{\rho}_{K+1} = \boldsymbol{\rho}(1, 2, 3, \dots, K+1)$ é o operador densidade de $K+1$ \mathfrak{S} tomos. Podemos facilmente verificar que a equação (4.2.7) é nula (pela regra cíclica do traço temos $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$, portanto $Tr([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = 0$). Desta forma equação (4.2.5) fica escrita como

$$Tr_{K+1, \dots, N}([\mathbf{S}_\lambda, \boldsymbol{\rho}_N]) = \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_K]. \quad (4.2.8)$$

Para a operação (4.2.4b), temos

$$\begin{aligned}
 Tr_{K+1, \dots, N}([\mathbf{S}_\lambda, \mathbf{S}_{\lambda'} \boldsymbol{\rho}_N]) &= Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=1}^N [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\sigma}_{\lambda'}(i') \boldsymbol{\rho}_N] \\
 &= Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\sigma}_{\lambda'}(i') \boldsymbol{\rho}_N] + Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=1}^K \sum_{i'=K+1}^N [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\sigma}_{\lambda'}(i') \boldsymbol{\rho}_N] \\
 &\quad + Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=K+1}^N \sum_{i'=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\sigma}_{\lambda'}(i') \boldsymbol{\rho}_N] + Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=K+1}^N [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\sigma}_{\lambda'}(i') \boldsymbol{\rho}_N], \quad (4.2.9)
 \end{aligned}$$

calculando termo a termo o lado direito da equação (4.2.9), temos:

para o primeiro termo de (4.2.9)

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N} \prod_{i,i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_N] &= \prod_{i,i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') Tr_{K+1,\dots,N}(\rho_N)] \\ &= \prod_{i,i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_K], \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

para o segundo termo de (4.2.9)

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N} \prod_{i=1}^{\bar{A}} \prod_{i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_N] &= \prod_{i=1}^{\bar{A}} \prod_{i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), Tr_{K+1,\dots,N}(\sigma_{\lambda'}(i') \rho_N)] \\ &= (N-K) \prod_{i=1}^{\bar{A}} [\sigma_\lambda(i), Tr_{K+1}(\sigma_{\lambda'}(K+1) \rho_{K+1})], \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

para o terceiro termo de (4.2.9)

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N} \prod_{i=K+1}^{\bar{A}} \prod_{i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_N] &= \prod_{i'=1}^K \sigma_{\lambda'}(i') \prod_{i=K+1}^{\bar{A}} Tr_{K+1,\dots,N}([\sigma_\lambda(i), \rho_N]) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

e para o quarto termo de (4.2.9)

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N} \prod_{i,i'=K+1}^{\bar{A}} [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_N] &= \prod_{i,i'=K+1}^{\bar{A}} Tr_{K+1,\dots,N}([\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_N]) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Assim, a equação (4.2.9) fica escrita como

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N}([\mathbf{S}_\lambda, \mathbf{S}_{\lambda'} \rho_N]) &= \prod_{i,i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \sigma_{\lambda'}(i') \rho_K] \\ &\quad + (N-K) \prod_{i=1}^{\bar{A}} [\sigma_\lambda(i), Tr_{K+1}(\sigma_{\lambda'}(K+1) \rho_{K+1})]. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

De maneira análoga, calcularemos a operação (4.2.4c)

$$\begin{aligned}
 Tr_{K+1, \dots, N}([\mathbf{S}_\lambda, \rho_N \mathbf{S}_{\lambda'}]) &= Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=1}^N [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] \\
 &= Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] + Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=1}^K \sum_{i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] \\
 &\quad + Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=K+1}^N \sum_{i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] + Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] ,
 \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

onde, termo a termo, temos:

para o primeiro termo de (4.2.15)

$$\begin{aligned}
 Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] &= \sum_{i, i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), Tr_{K+1, \dots, N}(\rho_N) \sigma_{\lambda'}(i')] \\
 &= \sum_{i, i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \rho_K \sigma_{\lambda'}(i')] ,
 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

para o segundo termo de (4.2.15)

$$\begin{aligned}
 Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=1}^K \sum_{i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] &= \sum_{i=1}^K \sum_{i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), Tr_{K+1, \dots, N}(\rho_N \sigma_{\lambda'}(i'))] \\
 &= (N - K) \sum_{i=1}^K [\sigma_\lambda(i), Tr_{K+1}(\rho_{K+1} \sigma_{\lambda'}(K+1))] ,
 \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

para o terceiro termo de (4.2.15)

$$Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i=K+1}^N \sum_{i'=1}^K [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] = \sum_{i=K+1}^N Tr_{K+1, \dots, N}([\sigma_\lambda(i), \rho_N] \sum_{i'=1}^K \sigma_{\lambda'}(i')) = 0, \tag{4.2.18}$$

e para o quarto termo de (4.2.15)

$$Tr_{K+1, \dots, N} \sum_{i, i'=K+1}^N [\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')] = \sum_{i, i'=K+1}^N Tr_{K+1, \dots, N}([\sigma_\lambda(i), \rho_N \sigma_{\lambda'}(i')]) = 0. \tag{4.2.19}$$

Substituindo os resultados (4.2.16), (4.2.17), (4.2.18) e (4.2.19) na equação (4.2.15) obte-

mos

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N}([\mathbf{S}_\lambda, \boldsymbol{\rho}_N \mathbf{S}_\lambda']) &= \sum_{i,i'=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_K \boldsymbol{\sigma}_\lambda'(i')] \\ &+ (N-K) \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), Tr_{K+1}^i \boldsymbol{\rho}_{K+1} \boldsymbol{\sigma}_\lambda'(K+1)]. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Desta maneira as operações (4.2.4) podem ser escritas como

$$Tr_{K+1,\dots,N}([\mathbf{S}_\lambda, \boldsymbol{\rho}_N]) = \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_K] \quad (4.2.21a)$$

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N}([\mathbf{S}_\lambda, \mathbf{S}_\lambda' \boldsymbol{\rho}_N]) &= \sum_{i,i'=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\sigma}_\lambda'(i') \boldsymbol{\rho}_K] \\ &+ (N-K) \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), Tr_{K+1}^i \boldsymbol{\sigma}_\lambda'(K+1) \boldsymbol{\rho}_{K+1}]. \end{aligned} \quad (4.2.21b)$$

$$\begin{aligned} Tr_{K+1,\dots,N}([\mathbf{S}_\lambda, \boldsymbol{\rho}_N \mathbf{S}_\lambda']) &= \sum_{i,i'=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), \boldsymbol{\rho}_K \boldsymbol{\sigma}_\lambda'(i')] \\ &+ (N-K) \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\sigma}_\lambda(i), Tr_{K+1}^i \boldsymbol{\rho}_{K+1} \boldsymbol{\sigma}_\lambda'(K+1)], \end{aligned} \quad (4.2.21c)$$

Substituindo as expressões (4.2.21a), (4.2.21b) e (4.2.21c) no lado direito da equação (4.2.3), obtemos finalmente uma equação mestra para K átomos de dois níveis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_K}{\partial t} &= -i \sum_{i=1}^K \left([\delta \boldsymbol{\sigma}_0(i) + F e^{-i\varphi} \boldsymbol{\sigma}_+(i) + F e^{i\varphi} \boldsymbol{\sigma}_-(i), \boldsymbol{\rho}_K]^a \right. \\ &- (N-K) \sum_{i=1}^K \left(\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} [\boldsymbol{\sigma}_+(i), Tr_{K+1}^i \boldsymbol{\sigma}_-(K+1) \boldsymbol{\rho}_{K+1}] \right. \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} e^{-i\varphi} [\boldsymbol{\sigma}_+(i), Tr_{K+1}^i \boldsymbol{\sigma}_0(K+1) \boldsymbol{\rho}_{K+1}] \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-2i\varphi} [\boldsymbol{\sigma}_+(i), Tr_{K+1}^i \boldsymbol{\sigma}_+(K+1) \boldsymbol{\rho}_{K+1}] + h.c. \left. \right) \\ &- \sum_{i,i'=1}^K \left((\hbar+1) \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} [\boldsymbol{\sigma}_+(i), \boldsymbol{\sigma}_-(i') \boldsymbol{\rho}_K] + \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} e^{-i\varphi} [\boldsymbol{\sigma}_+(i), \boldsymbol{\sigma}_0(i') \boldsymbol{\rho}_K] \right. \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-2i\varphi} [\boldsymbol{\sigma}_+(i), \boldsymbol{\sigma}_+(i') \boldsymbol{\rho}_K] + \hbar \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} [\boldsymbol{\sigma}_-(i), \boldsymbol{\sigma}_+(i') \boldsymbol{\rho}_K] \\ &+ \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} e^{i\varphi} [\boldsymbol{\sigma}_-(i), \boldsymbol{\sigma}_0(i') \boldsymbol{\rho}_K] + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{2i\varphi} [\boldsymbol{\sigma}_-(i), \boldsymbol{\sigma}_-(i') \boldsymbol{\rho}_K] + h.c. \left. \right). \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Percebe-se então que a determinação da equação mestra reduzida, de K átomos, ρ_K , dependerá do conhecimento do operador densidade de $K + 1$ átomos, ρ_{K+1} . Essas $N - 1$ equações são conhecidas pelo nome de hierarquia BBGKY [40], pois essa sequência foi estudada de forma independente por N. N. Bogoliubov, M. Born, H. S. Green, G. Kirkwood e J. Yvon.

Para $K = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = & -i[\delta \sigma_0 + F e^{-i\varphi} \sigma_+ + F e^{i\varphi} \sigma_-, \rho_1] - (N - 1) \left(\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} [\sigma_+, Tr_2(\sigma_-(2)\rho_2)] \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} e^{-i\varphi} [\sigma_+, Tr_2(\sigma_0(2)\rho_2)] + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-2i\varphi} [\sigma_+, Tr_2(\sigma_+(2)\rho_2)] + h.c. \right. \\ & - (\hbar + 1) \left(\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} [\sigma_+, \sigma_-\rho_1] + \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} e^{-i\varphi} [\sigma_+, \sigma_0\rho_1] + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-2i\varphi} [\sigma_+, \sigma_+\rho_1] + h.c. \right. \\ & \left. + \hbar \left(\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} [\sigma_-, \sigma_+\rho_1] + \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} e^{i\varphi} [\sigma_-, \sigma_0\rho_1] + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{2i\varphi} [\sigma_-, \sigma_-\rho_1] + h.c. \right) \right), \quad (4.2.23) \end{aligned}$$

onde $\rho_2 = \rho(1, 2)$ é o operador densidade para dois átomos. Para quebrarmos a hierarquia é necessário fazer alguma hipótese, por exemplo, a aproximação

$$\rho_2(1, 2) = \rho_1(1)\rho_1(2) \quad (4.2.24)$$

consiste em desprezar as correlações existentes entre os átomos 1 e 2. Desta maneira, na aproximação de "campo médio" a equação mestra reduz-se a uma equação não linear para um único átomo, a equação (4.2.23) fica escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\mathbf{H}_{ef}, \rho] - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} ((\hbar + 1)[\sigma_+, \sigma_-\rho] + \hbar[\sigma_-, \sigma_+\rho] + h.c.) \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} (\hbar + 1) e^{-i\varphi} [\sigma_+, \sigma_0\rho] + \hbar e^{i\varphi} [\sigma_-, \sigma_0\rho] + h.c. \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} (\hbar + 1) e^{-2i\varphi} [\sigma_+, \sigma_+\rho] + \hbar e^{2i\varphi} [\sigma_-, \sigma_-\rho] + h.c., \quad (4.2.25) \end{aligned}$$

onde substituímos ρ_1 por ρ . O hamiltoniano efetivo é escrito como

$$\mathbf{H}_{ef} = \delta \sigma_0 + F - i(N - 1) \left(\frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} \langle \sigma_+ \rangle + \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} \langle \sigma_0 \rangle + \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \langle \sigma_- \rangle \right) \sigma_+ + h.c., \quad (4.2.26)$$

contendo valores médios, que constituem o elemento não linear da equação. E como

definido no capítulo anterior

$$\tilde{\Gamma}_+ = \frac{1}{4\Phi^2} \left[(\Phi + \delta)^2 i_- + 2(\Phi^2 - \delta^2) i_0 + (\Phi - \delta)^2 i_+ \right] \quad (4.2.27a)$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = -\frac{F}{4\Phi^2} \left\{ (\Phi + \delta) i_- - 2\delta i_0 - (\Phi - \delta) i_+ \right\} \quad (4.2.27b)$$

$$\tilde{\Gamma}_- = -\frac{F}{2\Phi} \left\{ i_- - 2i_0 + i_+ \right\} \quad (4.2.27c)$$

$$i_{j'} \equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0 + 2j'\Phi)|^2, \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.2.27d)$$

Assim obtém-se uma equação mestra não linear, para um átomo sob influência de um campo eletromagnético clássico, onde agora temos um novo campo elétrico gerado pelos $(N - 1)$ átomos do sistema, e o campo emergente da amostra pode ser escrito sendo

$$E_T = \frac{1}{\mu} F + i \frac{(N - 1)}{2} \left[\tilde{\Gamma}_- \langle \sigma_+ \rangle + \tilde{\Gamma}_0 \langle \sigma_0 \rangle + \tilde{\Gamma}_+ \langle \sigma_- \rangle \right], \quad (4.2.28)$$

onde o segundo termo é um campo de polarização induzido

$$E_{pol} = i \frac{(N - 1)}{2\mu} \left[\tilde{\Gamma}_- \langle \sigma_+ \rangle + \tilde{\Gamma}_0 \langle \sigma_0 \rangle + \tilde{\Gamma}_+ \langle \sigma_- \rangle \right]. \quad (4.2.29)$$

A influência do reservatório térmico é portanto de criar um campo médio entre os átomos, além do efeito dissipativo usual.

De maneira análoga, em um reservatório de vácuo comprimido temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\mathbf{H}_{ef}, \rho] - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \cosh^2(r) [\sigma_+, \sigma_- \rho] + [\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} i \cosh^2(r) e^{-i\varphi} [\sigma_+, \sigma_0 \rho] + \sinh^2(r) e^{i\varphi} [\sigma_-, \sigma_0 \rho] + h.c. \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} i \cosh^2(r) e^{-i2\varphi} [\sigma_+, \sigma_+ \rho] + \sinh^2(r) e^{i2\varphi} [\sigma_-, \sigma_- \rho] + h.c. \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}'_+}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i\theta} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_+, \rho]] + h.c. \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}'_0}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i(\varphi + \theta)} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_0, \rho]] + h.c. \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}'_-}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i(2\varphi + \theta)} e^{2i(\omega_L - \omega_s)t} [\sigma_+, [\sigma_-, \rho]] + h.c., \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

onde \mathbf{H}_{ef} é o mesmo descrito pela equação (4.2.26), sendo

$$\tilde{\Gamma}_+ = \frac{1}{4\Phi^2} (\Phi + \delta)^2 i_- + 2(\Phi^2 - \delta^2) i_0 + (\Phi - \delta)^2 i_+ \quad (4.2.31a)$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = -\frac{F}{4\Phi^2} \{(\Phi + \delta) i_- - 2\delta i_0 - (\Phi - \delta) i_+\} \quad (4.2.31b)$$

$$\tilde{\Gamma}_- = -\frac{F}{2\Phi} \{i_- - 2i_0 + i_+\} \quad (4.2.31c)$$

$$i_j \equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_L + 2j\Phi)||g(2\omega_s - \omega_L - 2j\Phi)|, j = -1, 0, 1; \quad (4.2.31d)$$

e

$$\tilde{\Gamma}'_+ = \frac{1}{4\Phi^2} (\Phi + \delta)^2 i'_- + 2(\Phi^2 - \delta^2) i'_0 + (\Phi - \delta)^2 i'_+ \quad (4.2.32a)$$

$$\tilde{\Gamma}'_0 = -\frac{F}{4\Phi^2} \{(\Phi + \delta) i'_- - 2\delta i'_0 - (\Phi - \delta) i'_+\} \quad (4.2.32b)$$

$$\tilde{\Gamma}'_- = -\frac{F}{2\Phi} \{i'_- - 2i'_0 + i'_+\} \quad (4.2.32c)$$

$$i'_j \equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_L + 2j\Phi)||g(2\omega_s - \omega_L - 2j\Phi)|, j = -1, 0, 1. \quad (4.2.32d)$$

Para o caso particular em que a frequência central de compressão é ressonante com a frequência do campo clássico, $\omega_s = \omega_L$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\mathbf{H}_{ef}, \rho] - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \cosh^2(r) [\sigma_+, \sigma_- \rho] + [\sigma_-, \sigma_+ \rho] + h.c. \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_0}{2} i \cosh^2(r) e^{-i\varphi} [\sigma_+, \sigma_0 \rho] + \sinh^2(r) e^{i\varphi} [\sigma_-, \sigma_0 \rho] + h.c. \\ & - \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} i \cosh^2(r) e^{-i2\varphi} [\sigma_+, \sigma_+ \rho] + \sinh^2(r) e^{i2\varphi} [\sigma_-, \sigma_- \rho] + h.c. \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}'_+}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i\theta} [\sigma_+, [\sigma_+, \rho]] + h.c. \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}'_0}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i(\varphi+\theta)} [\sigma_+, [\sigma_0, \rho]] + h.c. \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}'_-}{2} \sinh(r) \cosh(r) i e^{i(2\varphi+\theta)} [\sigma_+, [\sigma_-, \rho]] + h.c. , \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

onde agora temos

$$i'_{j'} \equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_L + 2j'\Phi)||g(2\omega_L - 2j'\Phi)|. \quad (4.2.34)$$

Podemos facilmente perceber que as equações mestras apresentadas nesta seção diferem das apresentadas no capítulo 3, apenas pelo hamiltoniano efetivo (4.2.26), ou seja, para $N = 1$, os termos adicionais referentes ao campo médio são nulos, e as equações (4.2.25) e (4.2.30) se reduzem a equações mestras de um único átomo (3.1.8) e (3.2.5), respectivamente.

5 *Biestabilidade óptica*

Neste capítulo estudaremos o comportamento biestável relacionado aos campos incidente (campo de entrada F/μ) e emergente (campo de saída E_T equação (4.2.28)) de uma amostra constituída por N átomos de dois níveis, bombeados por um campo monocromático clássico e acoplados a um reservatório (térmico ou de vácuo comprimido). Nosso ponto de partida serão as equações mestras (4.2.25) e (4.2.33) apresentadas no capítulo anterior. A fim de tornar a solução das equações mais transparente do ponto de vista da física envolvida neste problema, vamos fazer as seguintes hipóteses:

1. A frequência do campo clássico é ressonante com a transição atômica,

$$\omega_L = \omega_0 \quad \implies \quad \delta = 0. \quad (5.0.1)$$

2. O acoplamento átomo-campo, representado por $|g(\omega)|$, é simétrico em torno de ω_0 , podendo ser descrito por

$$|g(\omega)| = \frac{i}{2\pi\mathcal{D}} \left[\xi + (1 - \xi) \frac{\gamma_c^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_c^2} \right], \quad (5.0.2)$$

com $0 \leq \xi \leq 1$, onde ξ é uma fração de acoplamento constante e $(1 - \xi)$ é a fração complementar do acoplamento que é descrito por uma distribuição lorentziana centrada em ω_0 e de largura γ_c .

Desta maneira podemos descrever alguns tipos de acoplamentos, como pode ser observado na figura 3:

- para $\xi = 0$ (figura 3a) o acoplamento é descrito por

$$|g(\omega)| = \frac{i}{2\pi\mathcal{D}} \frac{\gamma_c^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_c^2}, \quad (5.0.3)$$

- para $\xi = 1/2$ (figura 3b), o acoplamento é descrito por

$$|g(\omega)| = \frac{\Gamma}{2\pi\mathcal{D}} \frac{1}{1 + \frac{\gamma_c^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_c^2}}, \quad (5.0.4)$$

- para $\xi = 1$, resulta um acoplamento constante, $|g(\omega)| = \frac{\Gamma}{2\pi\mathcal{D}}$, para qualquer frequência ω .

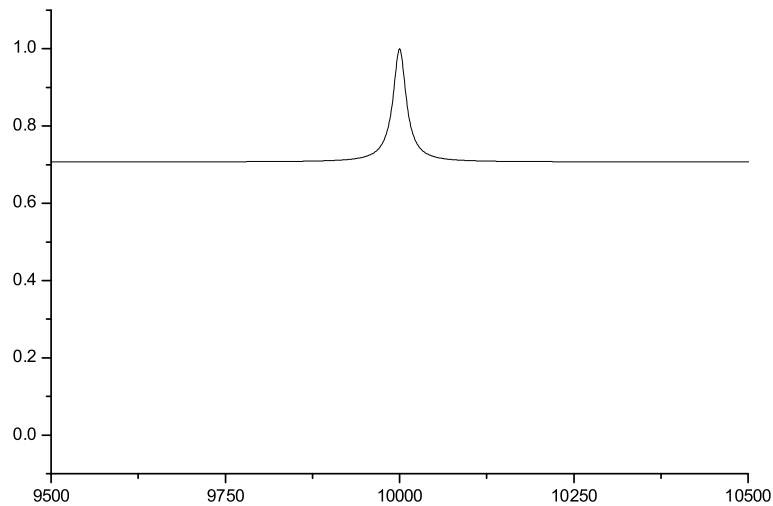


Figura 3: acoplamento $|g(\omega)|$, para os seguintes valores: $\omega_0 = 10^4$ i, $\gamma_c = 10$ i

Com estas hipóteses, escrevemos as frequências de relaxação $i_j^{(ter)}$, $i_j^{(vc)}$ e $i_j^{(vc)}$, onde o índice *ter* corresponde a reservatório térmico e *vc* a vácuo comprimido, a partir das

equações (4.2.27d), (4.2.31d) e (4.2.34) como

$$i_j^{(ter)} = i_j^{(vc)} \equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0 + 2jF)|^2 \quad (5.0.5a)$$

$$i_j'^{(vc)} \equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0 + 2jF)||g(\omega_0 - 2jF)| = 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0 + 2jF)|^2 \quad (5.0.5b)$$

com $j = -1, 0, 1$; ou seja, são todas idênticas, onde utilizamos a simetria de $|g(\omega)|$ em torno de ω_0 para escrever $|g(\omega_0 + 2jF)| = |g(\omega_0 - 2jF)|$ em (5.0.5b), logo podemos denotá-las simplesmente por i_j .

Utilizando a expressão (5.0.2) podemos escrever i_j como

$$\begin{aligned} i_j &\equiv 2\pi\mathcal{D}|g(\omega_0 + 2jF)|^2 \\ &= i_0 \left[\xi + (1 - \xi) \frac{\gamma_c^2}{(2jF)^2 + \gamma_c^2} \right], \end{aligned} \quad (5.0.6)$$

de maneira que i_0 , i_+ e i_- se tornam

$$i_0 = i_0 \quad (5.0.7a)$$

$$i_+ = i_- = i_0 \left[\xi + (1 - \xi) \frac{\gamma_c^2}{4F^2 + \gamma_c^2} \right], \quad (5.0.7b)$$

e conseqüentemente, a partir das equações (4.2.27a), (4.2.27b) e (4.2.27c), obtemos

$$\tilde{\Gamma}_+(F) = \frac{i_+ + i_+}{2} = \frac{i_0}{2} \left[(1 + \xi) + (1 - \xi) \frac{\gamma_c^2}{(2j'F)^2 + \gamma_c^2} \right] \quad (5.0.8a)$$

$$\tilde{\Gamma}_0 = 0 \quad (5.0.8b)$$

$$\tilde{\Gamma}_-(F) = \frac{i_- - i_+}{2} = \frac{i_0(1 - \xi)}{2} \left[1 - \frac{\gamma_c^2}{(2j'F)^2 + \gamma_c^2} \right]. \quad (5.0.8c)$$

Na Figura 4 podemos observar como os coeficientes $\tilde{\Gamma}_+$ e $\tilde{\Gamma}_-$ dependem da frequência de Rabi F .

- A Figura 4a mostra como o fator de decaimento $\tilde{\Gamma}_+$ é descrito a partir dos acoplamentos $|g(\omega)|$ para $\xi = 0, 1/2, 1$ na equação (5.0.8a).
- A Figura 4b mostra como o fator de decaimento $\tilde{\Gamma}_-$ é descrito a partir dos acoplamentos $|g(\omega)|$ para $\xi = 0, 1/2, 1$ na equação (5.0.8c).

Adotando as constantes de relaxação (5.0.8a), (5.0.8b) e (5.0.8c) vamos estudar o comportamento biestável do campo elétrico emergente, da amostra constituída pelos N átomos, quando o sistema está acoplado a um reservatório térmico, e em seguida apresentaremos o comportamento do mesmo quando acoplado a um reservatório de vácuo comprimido.

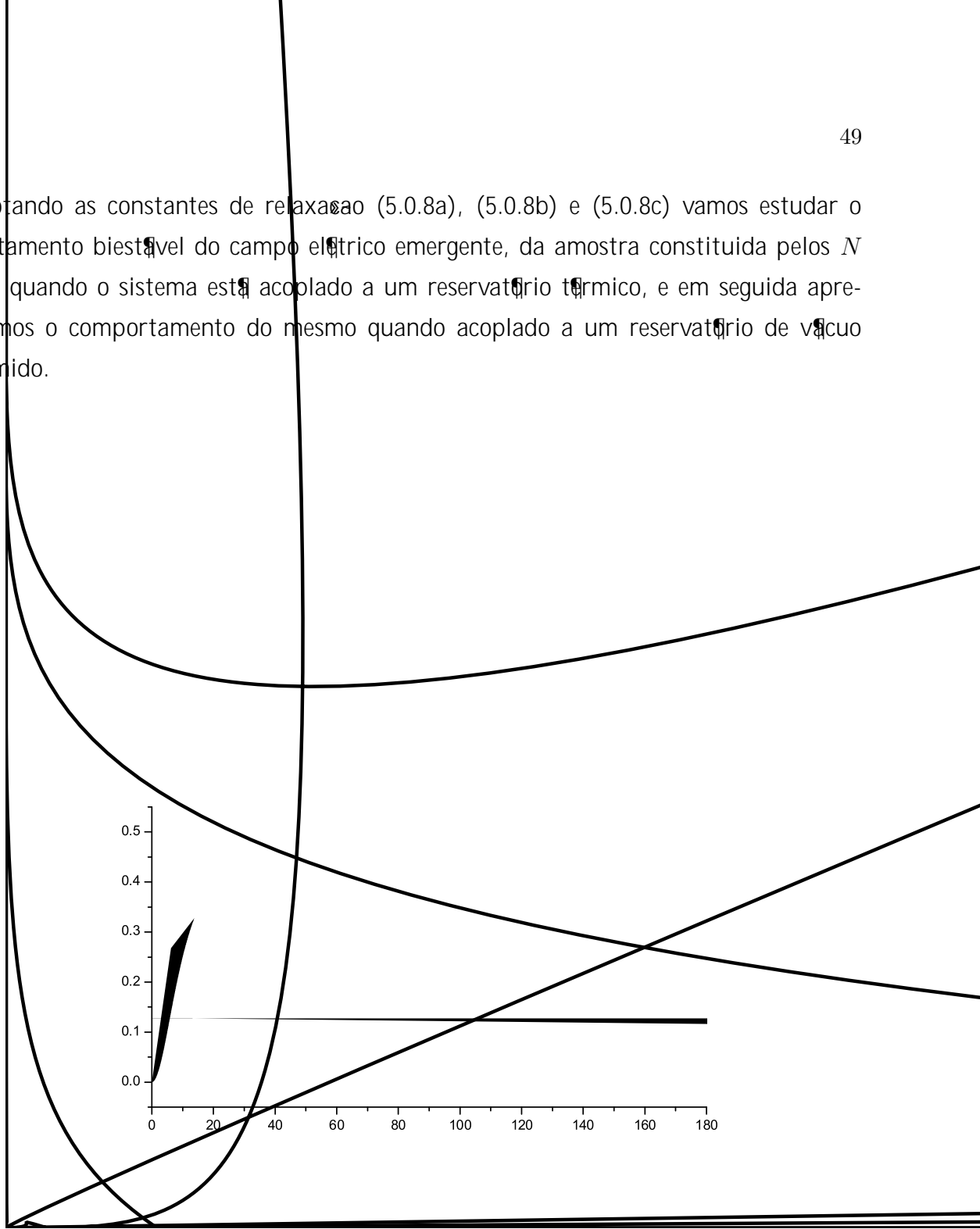


Figura 4: *Frequência de decaimento $\gamma_+(\omega)$, a partir dos acoplamentos $|g(\omega)|$ apresentados na figura 3*

5.1 Reservatório Térmico

A equação mestra não linear para um átomo representativo acoplado a reservatório térmico a temperatura nula, com as hipóteses (5.0.1) e (5.0.2) é descrita por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\mathbf{H}_{ef}, \rho] - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} (\sigma_+ \sigma_- \rho - 2\sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-i2\varphi} \sigma_+ \rho \sigma_+ + e^{i2\varphi} \sigma_- \rho \sigma_-, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

onde

$$\mathbf{H}_{ef} = \mu |E_0| e^{i\varphi} + E_{pol} \sigma_- + \mu |E_0| e^{-i\varphi} + E_{pol}^* \sigma_+, \quad (5.1.2)$$

e

$$E_{pol} = i \frac{(N-1)}{2\mu} \left[\tilde{\Gamma}_- e^{i2\varphi} \langle \sigma_- \rangle + \tilde{\Gamma}_+ \langle \sigma_+ \rangle \right], \quad (5.1.3)$$

o campo devido à polarização dos $(N-1)$ átomos da amostra.

A partir da equação mestra (5.1.1) podemos calcular as equações de movimento para os valores médios dos operadores σ_- , σ_0 e σ_+

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle &= Tr(\rho \sigma_0) \\ &= 2i\mu E_T \langle \sigma_- \rangle - \tilde{\Gamma}_+ (1 + \langle \sigma_0 \rangle) - 2i\mu E_T^* \langle \sigma_+ \rangle \end{aligned} \quad (5.1.4a)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_- \rangle &= Tr(\rho \sigma_-) \\ &= -\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \langle \sigma_- \rangle + i\mu E_T^* \langle \sigma_0 \rangle + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-2i\varphi} \langle \sigma_+ \rangle \end{aligned} \quad (5.1.4b)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_+ \rangle &= \langle \sigma_- \rangle^* \\ &= +\frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{2i\varphi} \langle \sigma_- \rangle - i\mu E_T \langle \sigma_0 \rangle - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \langle \sigma_+ \rangle, \end{aligned} \quad (5.1.4c)$$

sendo E_T o campo de saída, descrito por

$$E_T = |E_0| e^{i\varphi} + E_{pol}. \quad (5.1.5)$$

Para obter as soluções estacionárias das equações (5.1.4a), (5.1.4b), e (5.1.4c) temos que

resolver o seguinte conjunto de equações algébricas

$$2i\mu E_T \langle \sigma_- \rangle - \tilde{\Gamma}_+ \langle \sigma_0 \rangle - 2i\mu E_T^* \langle \sigma_+ \rangle = \tilde{\Gamma}_+ \quad (5.1.6a)$$

$$-\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \langle \sigma_- \rangle + i\mu E_T^* \langle \sigma_0 \rangle + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{-2i\varphi} \langle \sigma_+ \rangle = 0 \quad (5.1.6b)$$

$$+\frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} e^{2i\varphi} \langle \sigma_- \rangle - i\mu E_T \langle \sigma_0 \rangle - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} \langle \sigma_+ \rangle = 0, \quad (5.1.6c)$$

cujas soluções são

$$\langle \sigma_0 \rangle_{eq} = \frac{\tilde{\Gamma}_+ (\tilde{\Gamma}_-^2 - \tilde{\Gamma}_+^2)}{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 - 8\tilde{\Gamma}_- \mu^2 \text{Re}(E_T^2 e^{-2i\varphi}) + 8\tilde{\Gamma}_+ \mu^2 |E_T|^2} \quad (5.1.7a)$$

$$\langle \sigma_- \rangle_{eq} = \frac{2i\tilde{\Gamma}_+ (\tilde{\Gamma}_- e^{-2i\varphi} \mu E_T - \tilde{\Gamma}_+ \mu E_T^*)}{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 - 8\tilde{\Gamma}_- \mu^2 \text{Re}(E_T^2 e^{-2i\varphi}) + 8\tilde{\Gamma}_+ \mu^2 |E_T|^2} \quad (5.1.7b)$$

$$\langle \sigma_+ \rangle_{eq} = \frac{-2i\tilde{\Gamma}_+ (\tilde{\Gamma}_- e^{2i\varphi} \mu E_T^* - \tilde{\Gamma}_+ \mu E_T)}{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 - 8\tilde{\Gamma}_- \mu^2 \text{Re}(E_T^2 e^{-2i\varphi}) + 8\tilde{\Gamma}_+ \mu^2 |E_T|^2}. \quad (5.1.7c)$$

Desta maneira podemos escrever o campo de polarização gerado pelos $(N-1)$ átomos do sistema, substituindo $\langle \sigma_+ \rangle_{eq}$, $\langle \sigma_0 \rangle_{eq}$ e $\langle \sigma_- \rangle_{eq}$ na equação (5.1.3), obtendo

$$E_{pol} = (N-1) \frac{\tilde{\Gamma}_+ 2E_T^* e^{2i\varphi} \tilde{\Gamma}_- \tilde{\Gamma}_+ - E_T (\tilde{\Gamma}_+^2 + \tilde{\Gamma}_-^2)}{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 - 8\tilde{\Gamma}_- \mu^2 \text{Re}(E_T^2 e^{-2i\varphi}) + 8\tilde{\Gamma}_+ \mu^2 |E_T|^2}. \quad (5.1.8)$$

A partir da equação (5.1.5) podemos escrever o campo de entrada $|E_0|$ como

$$|E_0| = E_T e^{-i\varphi} - E_{pol} e^{-i\varphi}, \quad (5.1.9)$$

e escrevendo $E_T = |E_T| e^{i\nu}$ temos

$$|E_0| = |E_T| e^{i(\nu-\varphi)} + (N-1) \frac{\tilde{\Gamma}_+ (\tilde{\Gamma}_+^2 + \tilde{\Gamma}_-^2) e^{i(\nu-\varphi)} - 2\tilde{\Gamma}_- \tilde{\Gamma}_+ e^{-i(\nu-\varphi)}}{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2} \frac{\tilde{\Gamma}_+ - \tilde{\Gamma}_- \cos(2\nu - 2\varphi)}{\tilde{\Gamma}_+ - \tilde{\Gamma}_- \cos(2\nu - 2\varphi)}, \quad (5.1.10)$$

onde agora a parte imaginária da equação (5.1.10) tem de ser nula, de maneira que $\nu = \varphi$ é uma solução, logo esta escreve-se como

$$|E_0| = |E_T| \left[1 + (N-1) \frac{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+ - \tilde{\Gamma}_-}{\tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_+ + \tilde{\Gamma}_- + 8\mu^2 |E_T|^2} \right], \quad (5.1.11)$$

obtendo assim, uma relação entre os módulos do campo de saída $|E_T|$ e do campo de

entrada $|E_0|$.

Utilizando as equações (5.0.8a) e (5.0.8c) obtemos

$$\tilde{\Gamma}_+ + \tilde{\Gamma}_- = i \quad (5.1.12)$$

$$\tilde{\Gamma}_+ - \tilde{\Gamma}_- = i_+, \quad (5.1.13)$$

desta forma podemos reescrever

$$|E_0| = |E_T| \sqrt{1 + (N-1) \frac{i_+ (i_+ + i_+)}{i_+ (i_+ + i_+) + 16\mu^2 |E_T|^2}}. \quad (5.1.14)$$

A partir da equação (5.1.14) faremos um mapeamento numérico para determinar ponto a ponto a relação entre $|E_0|$ e $|E_T|$, uma vez que $|E_0|$ é uma função de $i_+ (|E_0|)$ e de $|E_T|$; desta forma obtemos o comportamento biestável que os campos de entrada e saída apresentam neste sistema como pode ser observado nas figuras (5-8).

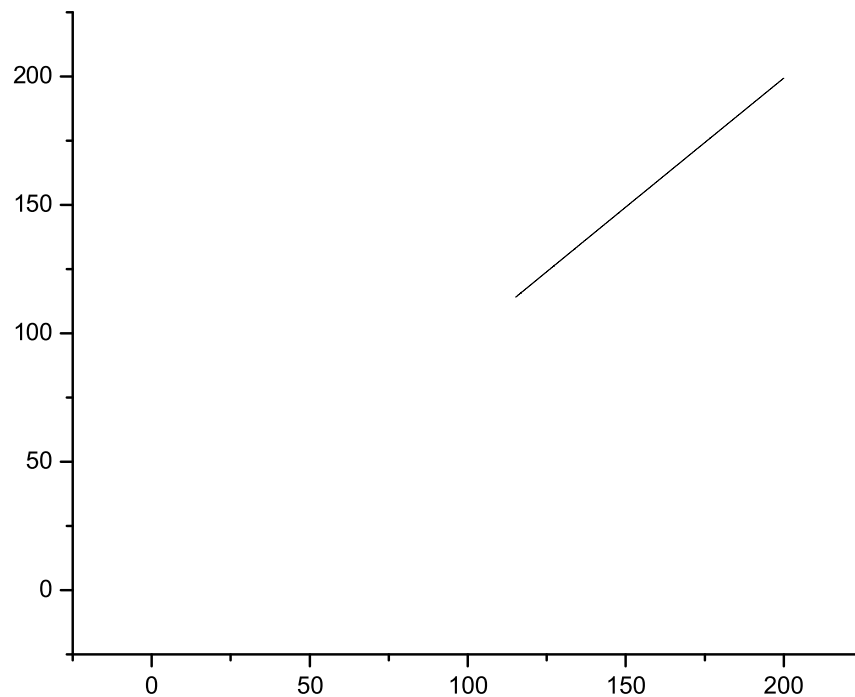


Figura 5: *Comportamento biestável da relação entre os campos de entrada e saída, onde consideramos $N = 1001$, $\xi = 1$, $\gamma_c = 10$.*

A relação entre os campos de saída e de entrada, como mostra a figura 5, apresenta

uma curva de histerese, onde ao aumentarmos a intensidade do campo de entrada podemos obter duas possíveis respostas no campo de saída, acompanhando as setas na Figura 5. Quando $\mu|E_0|/i < 180$ ao aumentarmos a intensidade do campo de entrada o campo de saída pode representar um bit no estado 0, e para $\mu|E_0|/i > 180$ o campo "resposta" (saída) sobe abruptamente, podendo representar um bit no estado 1, o mesmo acontece quando diminuirmos a intensidade do campo de entrada. Este efeito pode ser utilizado para criar dispositivos, como um sistema de chaveamento óptico.

Comparando as Figuras 5 e 6, onde consideramos $\xi = 1$ na equação (5.0.2), podemos verificar que a relação biestável (entre os campos de saída $|E_T|$ e entrada $|E_0|$) é sensível ao número de átomos contidos no sistema; isto é esperado, uma vez que o campo de polarização $|E_{pol}|$ é proporcional ao número de átomos (equação (5.1.8)).

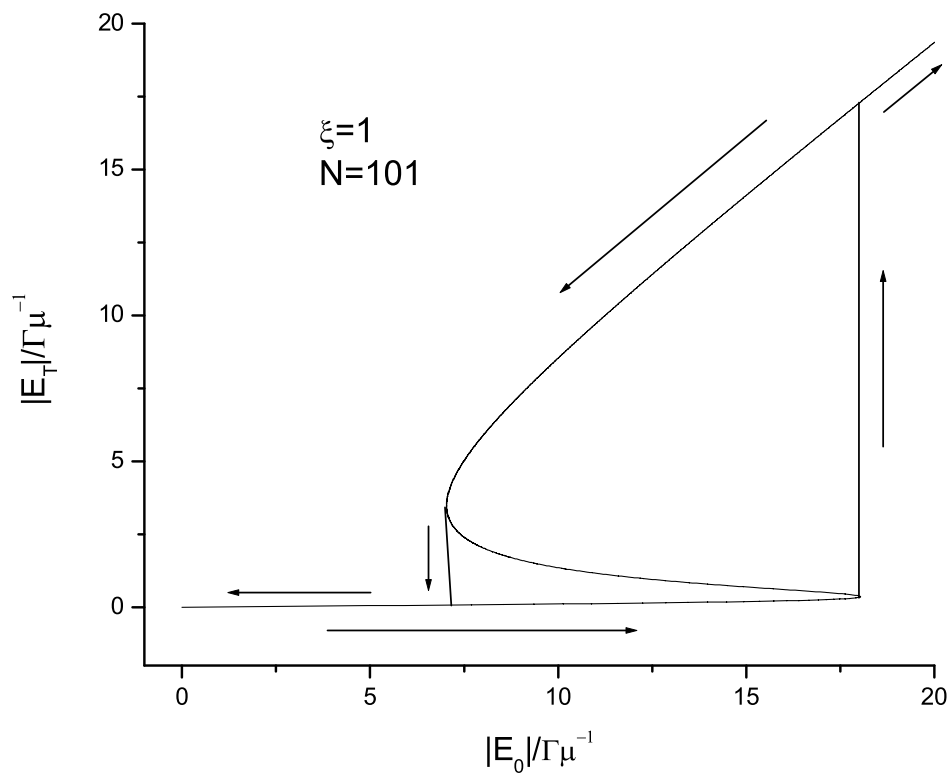


Figura 6: Comportamento biestável da relação entre os campos de entrada e saída, onde consideramos $N = 101$, $\xi = 1$, $\gamma_c = 10i$.

Observando as Figuras 6, 7 e 8, onde consideramos o número de átomos contidos no sistema $N = 101$, podemos comparar as escalas e perceber que a forma do acoplamento, equação (5.0.2), influencia o comportamento biestável apresentado pelo campo de saída

$|E_T|$ em relação ao campo de entrada $|E_0|$, para $\xi = 1, 1/2, 0$.

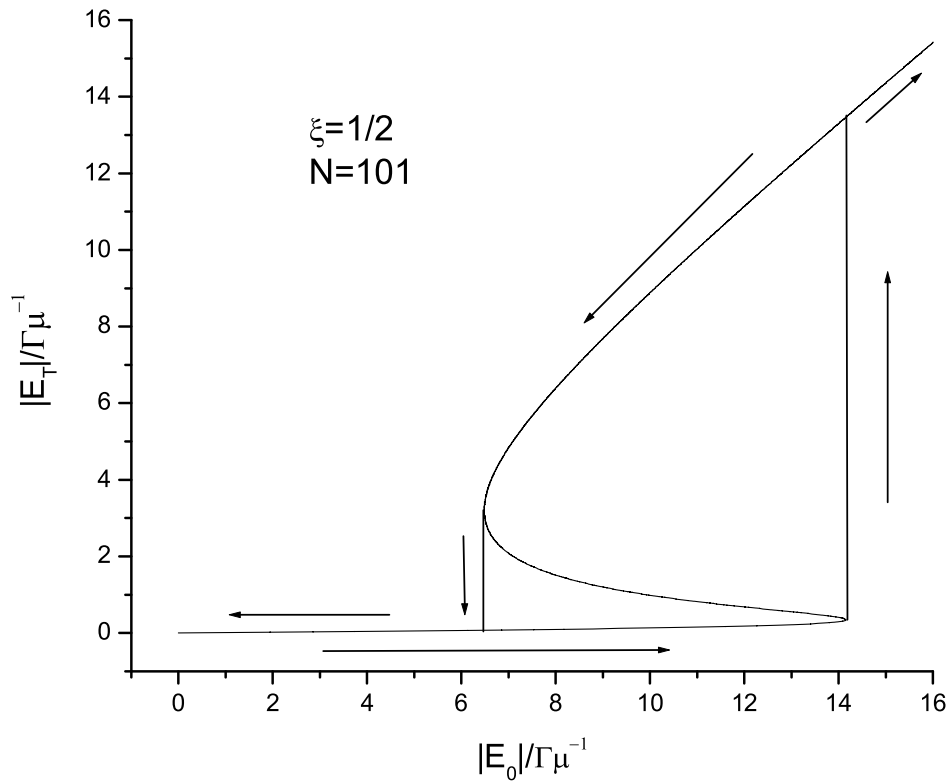


Figura 7: Comportamento biestável da relação entre os campos de entrada e saída, onde consideramos $N = 101$, $\xi = 1/2$, $\gamma_c = 10i$.

A partir das figuras (5-8), observamos que o fenômeno de biestabilidade pode ser afetado por dois fatores, o número de átomos presentes na amostra e o tipo de acoplamento; ou seja, a maneira como o átomo se acopla ao reservatório. Outra observação pode ser feita a respeito deste sistema, é que o campo clássico $|E_0|$ aplicado sobre este pode interferir no comportamento biestável de maneira não trivial uma vez que temos $j(E_0)$.

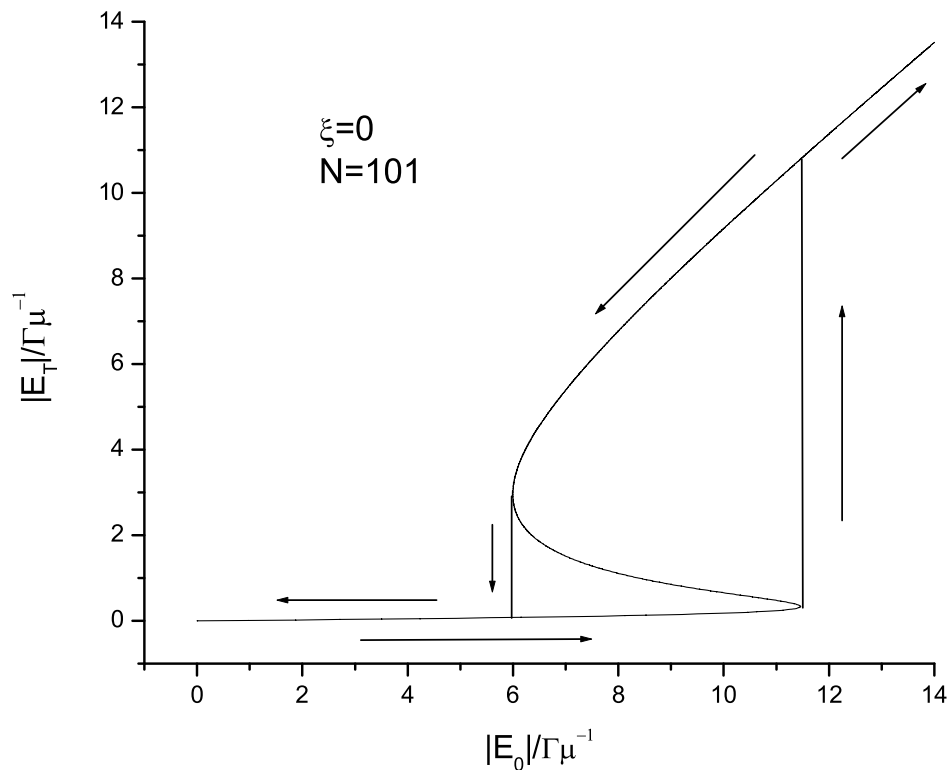


Figura 8: *Comportamento biestável da relação entre os campos de entrada e saída, onde consideramos $N = 101$, $\xi = 0$, $\gamma_c = 10i$.*

Na próxima seção veremos o comportamento deste sistema em um reservatório de vácuo comprimido, onde agora o comportamento biestável poderá ser afetado pelo ângulo θ e pelo fator de compressão r .

5.2 Vácuo Comprimido

A partir da equação mestra não linear (4.2.33) deduzida no capítulo anterior, e as hipóteses feitas no início deste capítulo, obtemos a seguinte equação mestra não linear para um átomo representativo em reservatório de vácuo comprimido,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i[\mathbf{H}_{ef}, \rho] - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \left[2 \sinh r \cosh r (e^{i\theta} \sigma_+ \rho \sigma_+ + e^{-i\theta} \sigma_- \rho \sigma_-) \right. \\
& + \cosh^2 r (\sigma_+ \sigma_- \rho - 2 \sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_+ \sigma_-) + \sinh^2 r (\sigma_- \sigma_+ \rho - 2 \sigma_+ \rho \sigma_- + \rho \sigma_- \sigma_+) \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \sinh r \cosh r (e^{i(2\varphi+\theta)} (\sigma_+ \sigma_- \rho - \sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_- \sigma_+) \\
& + (e^{-i(2\varphi+\theta)} (\sigma_- \sigma_+ \rho - \sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \rho \sigma_- + \rho \sigma_+ \sigma_-) \\
& \left. + \cosh 2r (e^{-i2\varphi} \sigma_+ \rho \sigma_+ + e^{i2\varphi} \sigma_- \rho \sigma_-) \right] . \tag{5.2.1}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{H}_{ef} = \mu \left[|E_0| e^{i\varphi} + E_{pol} \right] \sigma_- + \mu \left[|E_0| e^{-i\varphi} + E_{pol}^* \right] \sigma_+, \tag{5.2.2}$$

o operador hamiltoniano efetivo e

$$E_{pol} = i \frac{(N-1)}{2\mu} \left[\tilde{\Gamma}_- e^{i2\varphi} \langle \sigma_- \rangle + \tilde{\Gamma}_+ \langle \sigma_+ \rangle \right], \tag{5.2.3}$$

o campo de polarização criado pelos $(N-1)$ átomos do sistema.

Procedendo de maneira análoga como na seção anterior, vamos encontrar, a partir da equação mestra não linear, uma relação entre os campos de entrada e de saída. A partir da equação (5.2.1) calcularemos as equações de movimento para os valores médios dos operadores σ_- , σ_0 e σ_+ , obtendo

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_0 \rangle = & 2\tilde{\Gamma}_- \sinh r \cosh r \cos(2\varphi + \theta) \langle \sigma_0 \rangle - 2i\mu E_T^* \langle \sigma_+ \rangle \\
& - \tilde{\Gamma}_+ (1 + \cosh 2r \langle \sigma_0 \rangle) + 2i\mu E_T \langle \sigma_- \rangle \tag{5.2.4a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_- \rangle = & -\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \cosh 2r \langle \sigma_- \rangle + 2 \sinh r \cosh r e^{i\theta} \langle \sigma_+ \rangle + i\mu E_T^* \langle \sigma_0 \rangle \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} i e^{-2i\varphi} \cosh 2r \langle \sigma_+ \rangle + 2 \sinh r \cosh r e^{i(2\varphi+\theta)} \langle \sigma_- \rangle \tag{5.2.4b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_+ \rangle = & -\frac{\tilde{\Gamma}_+}{2} i \cosh 2r \langle \sigma_+ \rangle + 2 \sinh r \cosh r e^{-i\theta} \langle \sigma_- \rangle - i\mu E_T \langle \sigma_0 \rangle \\
& + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{2} i e^{2i\varphi} \cosh 2r \langle \sigma_- \rangle + 2 \sinh r \cosh r e^{-i(2\varphi+\theta)} \langle \sigma_+ \rangle, \tag{5.2.4c}
\end{aligned}$$

sendo

$$E_T = |E_0|e^{i\varphi} + E_{pol}, \quad (5.2.5)$$

o campo total de saída.

Para calcular as soluções estacionárias das equações (5.2.4a), (5.2.4b), e (5.2.4c) temos que resolver o seguinte conjunto de equações algébricas

$$2i\mu E_T \langle \sigma_- \rangle + (2\tilde{\Gamma}_- \sinh r \cosh r \cos(2\varphi + \theta) - \tilde{\Gamma}_+ \cosh 2r) \langle \sigma_0 \rangle - \frac{2i\mu E_T^* \langle \sigma_+ \rangle}{\tilde{A}} = \tilde{\Gamma}_+ \quad (5.2.6a)$$

$$\frac{\tilde{\Gamma}_-}{\tilde{A}} e^{i(2\varphi+\theta)} \sinh 2r - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{\tilde{A}} \cosh 2r \langle \sigma_- \rangle + i\mu E_T \langle \sigma_0 \rangle + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{\tilde{A}} e^{-2i\varphi} \cosh 2r - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{\tilde{A}} e^{i\theta} \sinh 2r \langle \sigma_+ \rangle = 0 \quad (5.2.6b)$$

$$\frac{\tilde{\Gamma}_-}{\tilde{A}} e^{2i\varphi} \cosh 2r - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{\tilde{A}} e^{-i\theta} \sinh 2r \langle \sigma_- \rangle - i\mu E_T \langle \sigma_0 \rangle + \frac{\tilde{\Gamma}_-}{\tilde{A}} e^{-i(2\varphi+\theta)} \sinh 2r - \frac{\tilde{\Gamma}_+}{\tilde{A}} \cosh 2r \langle \sigma_+ \rangle = 0, \quad (5.2.6c)$$

cuja solução é

$$\langle \sigma_0 \rangle_{eq} = \frac{\tilde{\Gamma}_+ (\tilde{\Gamma}_-^2 - \tilde{\Gamma}_+^2)}{Re(\alpha) \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2 - 8\mu^2 Re(E_T^2/\beta)} \quad (5.2.7a)$$

$$\langle \sigma_- \rangle_{eq} = \frac{2i\tilde{\Gamma}_+ \mu (\beta E_T - \alpha E_T^*)}{Re(\alpha) \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2 - 8\mu^2 Re(E_T^2/\beta)} \quad (5.2.7b)$$

$$\langle \sigma_+ \rangle_{eq} = \frac{-2i\tilde{\Gamma}_+ \mu (\beta^* E_T^* - \alpha^* E_T)}{Re(\alpha) \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2 - 8\mu^2 Re(E_T^2/\beta)}, \quad (5.2.7c)$$

onde

$$\alpha = \tilde{\Gamma}_+ \cosh 2r - \tilde{\Gamma}_- e^{-i(2\varphi+\theta)} \sinh 2r \quad (5.2.8a)$$

$$\beta = \tilde{\Gamma}_- e^{-2i\varphi} \cosh 2r - \tilde{\Gamma}_+ e^{i\theta} \sinh 2r. \quad (5.2.8b)$$

Podemos escrever o campo de polarização gerado pelos $(N - 1)$ átomos do sistema como

$$E_{pol} = -(N - 1) \tilde{\Gamma}_+ \frac{\tilde{\Gamma}_- (\beta E_T - \alpha E_T^*) e^{2i\varphi} - \tilde{\Gamma}_+ (\beta^* E_T^* - \alpha^* E_T)}{Re(\alpha) \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2 - 8\mu^2 Re(E_T^2/\beta)}. \quad (5.2.9)$$

Desta maneira podemos encontrar uma relação entre os campos de entrada e de saída,

$$|E_0| = |E_T| e^{-i(\varphi-\nu)} + (N-1) \frac{\tilde{\Gamma}_-(\beta e^{i\nu} - \alpha e^{-i\nu})e^{i\varphi} - \tilde{\Gamma}_+(\beta^* e^{-i\nu} - \alpha^* e^{i\nu})e^{-i\varphi}}{Re(\alpha) \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2 Re(\alpha - e^{i2\nu}\beta)} A. \quad (5.2.10)$$

Para o caso em que os campos de entrada e de saída estiverem sem defasagem $\varphi = \nu$, obtemos

$$|E_0| = |E_T| \left[1 + (N-1) \frac{\tilde{\Gamma}_-(\beta e^{i2\varphi} - \alpha) - \tilde{\Gamma}_+(\beta^* e^{-i2\varphi} - \alpha^*)}{Re(\alpha) \tilde{\Gamma}_+^2 - \tilde{\Gamma}_-^2 + 8\mu^2 |E_T|^2 Re(\alpha - e^{i2\varphi}\beta)} \right] A. \quad (5.2.11)$$

Vamos agora analisar o segundo termo do lado direito da equação (5.2.11), onde para o numerador obtemos

$$(N-1) \frac{\tilde{\Gamma}_-(\beta e^{i2\varphi} - \alpha) - \tilde{\Gamma}_+(\beta^* e^{-i2\varphi} - \alpha^*)}{2} = - (N-1) \frac{i + i}{2} \left[i + Re(\beta e^{i2\varphi} - \alpha) + i Im(\beta e^{i2\varphi} - \alpha) \right], \quad (5.2.12)$$

sendo

$$(\beta e^{i2\varphi} - \alpha) = -i + (\cosh 2r + \cos(2\varphi + \theta) \sinh 2r) - i \sin(2\varphi + \theta) \sinh 2r. \quad (5.2.13)$$

Onde a parte imaginária da equação (5.2.13) deve ser nula, desta maneira obtemos duas possíveis soluções

$$\theta = n\pi - 2\varphi, (n = 0, 1), \quad (5.2.14)$$

e as equações (5.2.8a) e (5.2.8b) podem ser escritas como

$$(\beta e^{i2\varphi} - \alpha) = -i + (\cosh 2r + (-)^n \sinh 2r) = -i + e^{(-)^n 2r}. \quad (5.2.15)$$

Obtendo então

$$|E_0| = |E_T| \left[1 + (N-1) \frac{(i + i)}{i (e^{(-)^n 4r} + i + i) + 16\mu^2 |E_T|^2} \right]. \quad (5.2.16)$$

Para o caso particular $r = 0$, obtemos a equação (5.1.14), a qual relaciona os campos de entrada e saída para o caso de um reservatório térmico a temperatura zero, ou seja, o vácuo comum. O fator $(-)^n$ representa a fase de compressão θ : para o caso em que $\varphi = 0$, $n = 0$ temos $\theta = 0$ e para $n = 1$ temos $\theta = \pi$.

Assim, como na seção anterior, a partir da equação (5.2.16) faremos um mapeamento

número que determinará a relação entre os campos $|E_0|$ e E_T , e desta forma obteremos o comportamento biestável do feixe de saída quando o sistema atômico estiver acoplado a um reservatório de vácuo comprimido.

Ao observarmos as figuras 9 e 10 podemos facilmente perceber que, como na seção anterior, o comportamento biestável apresentado pelo campo de saída é sensível ao número de átomos contidos no sistema. A partir da figura 11 vamos adotar o número de átomos $N = 101$, para fazermos outras análises.

0 50 10

Figura 9: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída para um conjunto de 1001 átomos de dois níveis acoplados a um reservatório de vácuo comprimido, $\xi = 1$.*

Podemos, então, comparar as figuras 10 e 11, onde temos um conjunto de 101 átomos, com um fator de compressão $r = 1/2$ e fase $\theta = \pi$, para duas formas distintas de acoplamento, $\xi = 1, 0$. Desta forma podemos perceber que o fenômeno de biestabilidade é sensível ao acoplamento, assim como foi verificado na seção anterior.

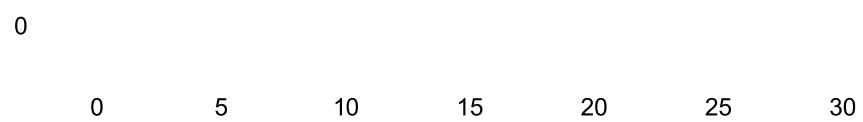


Figura 10: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída para um conjunto de 101 átomos de dois níveis acoplados a um reservatório de vácuo comprimido*

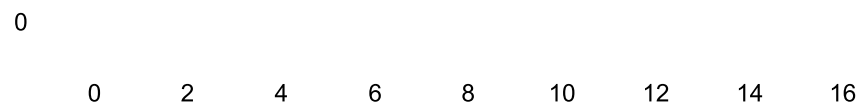


Figura 11: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída para um conjunto de 101 átomos de dois níveis acoplados a um reservatório de vácuo comprimido, $\xi = 0$.*

Uma vez verificada a influência do número de átomos e do tipo de acoplamento no comportamento biestável do campo de saída, vamos agora analisar a sensibilidade deste quando variamos o fator de compressão r e a fase de compressão θ . A partir de agora consideraremos que o sistema contém 101 átomos que estão acoplados ao reservatório de vácuo comprimido com $\xi = 1$ na equação (5.0.2).

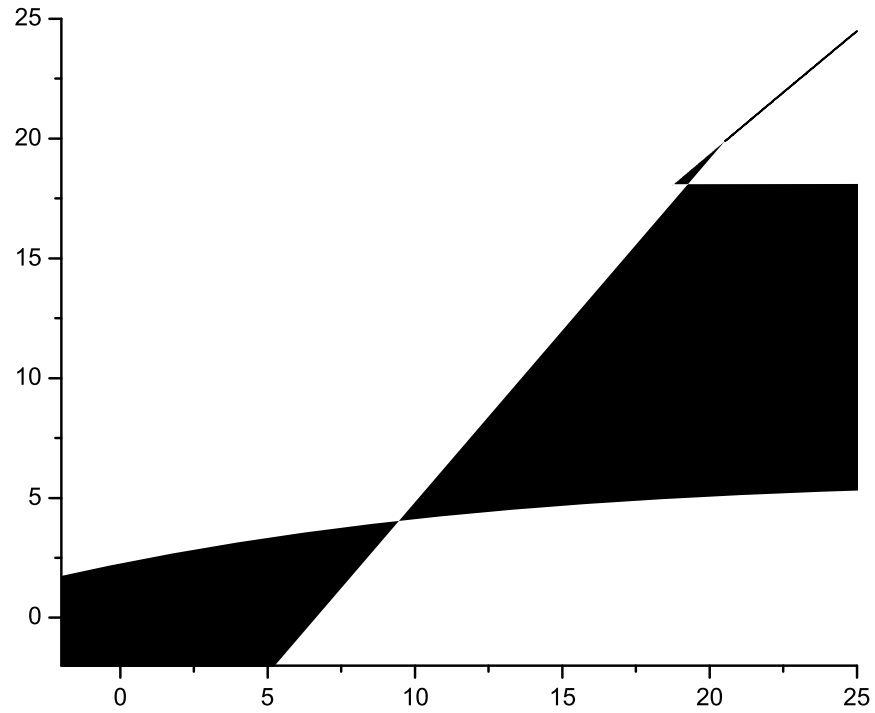


Figura 12: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída, considerando $\xi = 1$, $N = 101$, para $\theta = 0, \pi$ e $r = 0.3$.*

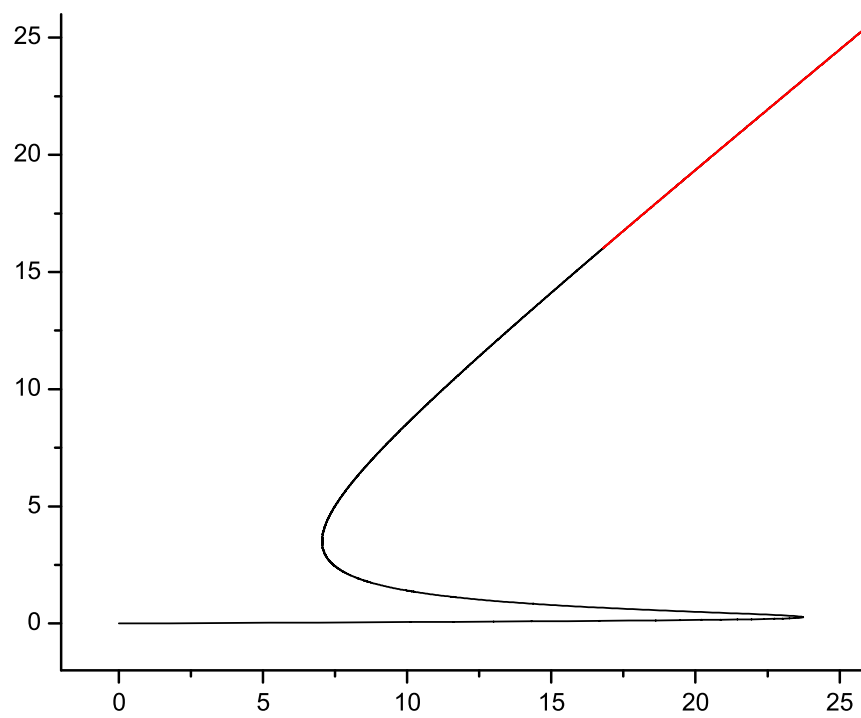


Figura 13: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída, considerando $\xi = 1$, $N = 101$, onde comparamos as fases $\theta = 0, \pi$, para $r = 0.5$.*

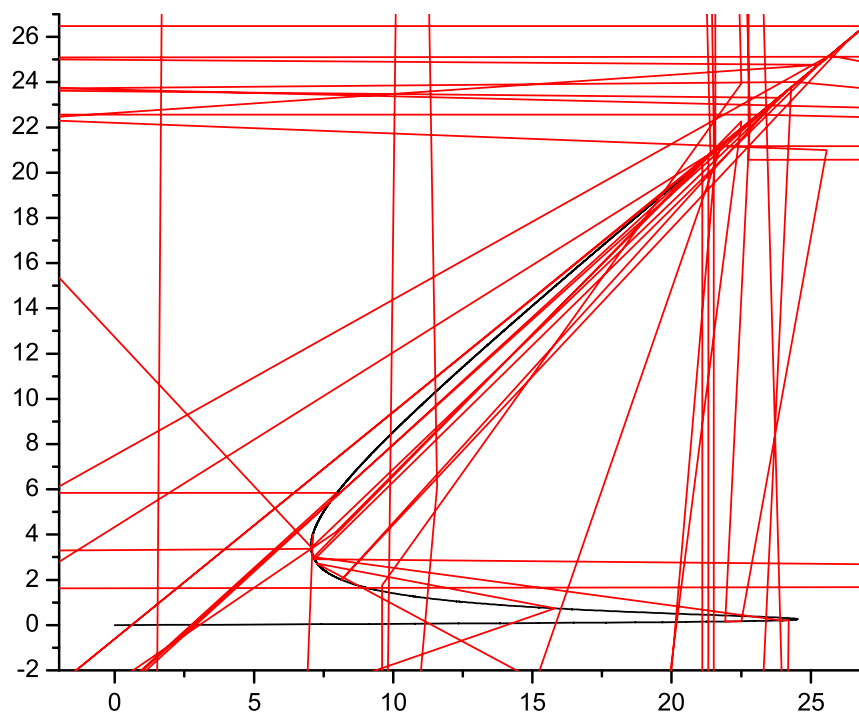


Figura 14: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída, considerando $\xi = 1$, $N = 101$, onde comparamos as fases $\theta = 0, \pi$, para $r = 0.7$.*

Observando as figuras 12, 13 e 14, verificamos que a biestabilidade é sensível à fase θ , onde para o caso $\theta = 0$ o comportamento biestável tende a ser menos pronunciado, enquanto que para o caso $\theta = \pi$ o comportamento é amplificado, comparados ao caso em que temos o vácuo comum, $r = 0$.

Nas figuras 15 e 16 vamos observar o quão sensível é o efeito biestável quando variamos o fator de compressão r .

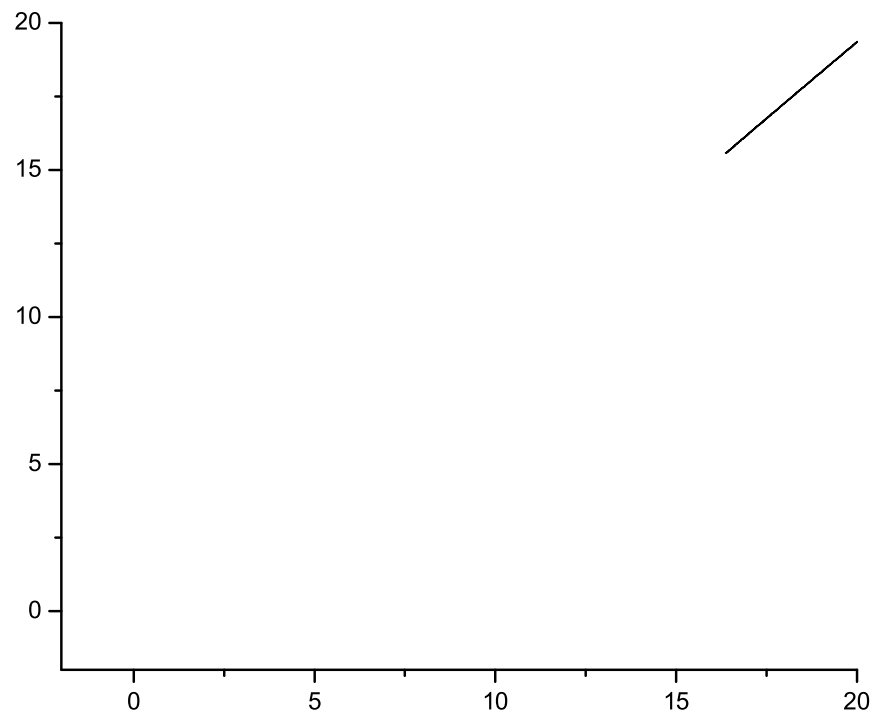


Figura 15: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída, considerando $\xi = 1$, $N = 101$, $\theta = 0$ e diferentes valores de r .*

Comparando entre si as figuras 15 e 16 verificamos que o fator de compressão influencia o comportamento biestável do campo de saída e para $\theta = 0$ percebemos que quanto maior r , menor o efeito biestável, e quando $\theta = \pi$ temos o comportamento inverso, ou seja, quanto maior o fator de compressão, maior o efeito biestável. Desta maneira verificamos neste capítulo como o efeito de biestabilidade pode ser afetado pela fase θ e fator de compressão r , além da dependência com o número de átomos e da maneira como o acoplamento átomo-reservatório é descrito.

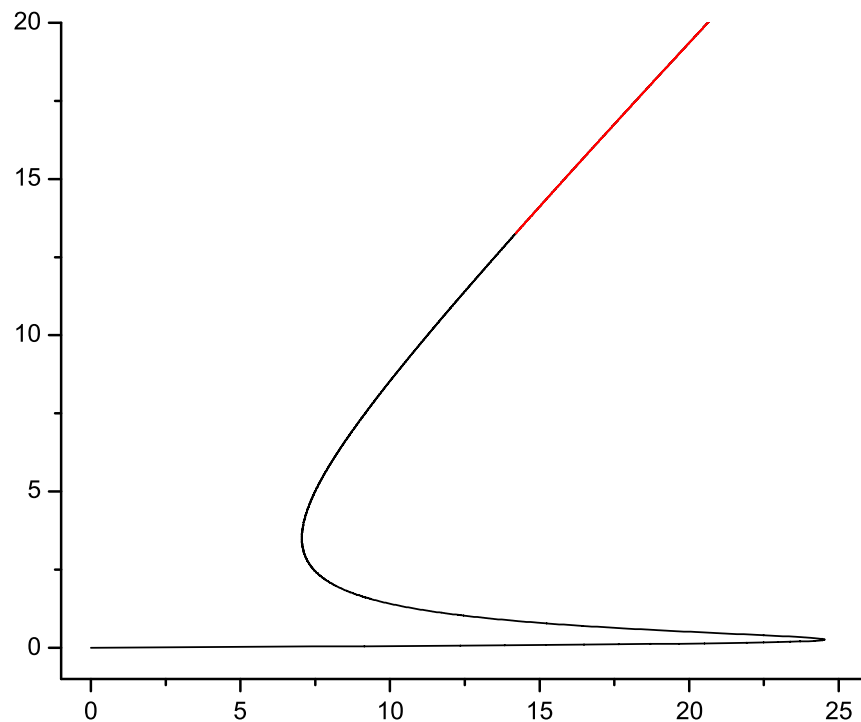


Figura 16: *Comportamento biestável apresentado pelo campo de saída, considerando $\xi = 1$, $N = 101$, $\theta = \pi$ e diferentes valores de r .*

6 Conclusões

Estudamos o comportamento biestável entre os campos incidente e emergente de uma amostra constituída de N átomos de dois níveis utilizando uma equação mestra não linear para um único átomo da amostra. Levamos em conta o bombeio clássico como parte do sistema, desta forma obtivemos a dinâmica para o operador densidade, onde agora o campo clássico participa dos processos irreversíveis.

Para calcular a equação mestra não linear partimos de uma equação mestra linear para o conjunto de N átomos de dois níveis, inicialmente descorrelacionados, ou seja, consideramos a distância média entre os átomos grande o suficiente para desprezar as interações átomo-átomo. Na aproximação de campo médio a partir da equação linear deduzimos a equação não linear para um átomo representativo do sistema, onde agora este encontra-se correlacionado com os $(N - 1)$ átomos do sistema via reservatório.

Os resultados obtidos para o comportamento biestável foram apresentados no capítulo 6, onde podemos destacar como resultado principal a influência do tipo de acoplamento átomo-reservatório no fenômeno de biestabilidade óptica. Mostramos que existe uma relação não trivial entre os campos incidente e emergente da amostra, pois o coeficiente $i_+(|E_0|)$, contido nas equações (5.1.14) e (5.2.16), depende da intensidade do campo incidente. Esta consideração pode ser relevante, uma vez que os experimentos que envolvem biestabilidade óptica são realizados colocando átomos dentro de uma cavidade, e esta pode modificar o acoplamento átomo-reservatório. Para o caso particular em que o acoplamento \mathcal{G} constante obtemos os resultados contido na literatura ^[19-33], onde os efeitos biestáveis dependem essencialmente do número de átomos, do fator e da fase de compressão.

Referências

- 1 W. Peier, *Physica* **57**, 565 (1972).
- 2 W. Peier, *Physica* **58**, 229 (1972).
- 3 A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, (1978).
- 4 K. H. Li, *Phys. Reports* **134**, (1986).
- 5 P. Grigolini, *Quantum Mechanical Irreversibility and Measurement*, (World Scientific Publishing) (1993).
- 6 V. F. Weisskopf e E. Wigner, *Z. Physik* **63**, 54 (1930).
- 7 M. O. Scully e M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press) (1997).
- 8 W. H. Zurek, *Phys. Today* **44**, 36 (1991).
- 9 D. F. Walls e G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **31**, 2403 (1986).
- 10 C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions (Basic Processes and Applications)*, (John Wiley & Sons) (1992).
- 11 C. W. Gardiner, *Phys. Rev.* **56**, 1917 (1986).
- 12 R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- 13 N. Skribanowitz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 309 (1973).
- 14 G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **2**, 2038 (1970).
- 15 G. S. Agarwal, *Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to Other Approches*, Springer Tractts in Modern Physics, Vol. 70, (Springer-Verlag), Berlin (1970).
- 16 G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **3**, 1783 (1971).
- 17 G. S. Agarwal, *Progress in Optics*(North-Holland), Amsterdam, **XI**(1973).
- 18 S. S. Mizrahi e M. A. Mewes, *Int. J. Mod. Phys. B* **12**, 2353-2365 (1993).
- 19 L. P. Maia, G. A. Prativiera e S. S. Mizrahi, *Phys. Rev. A* **69**, 53802 (2004).
- 20 S. L. McCall, *Phys. Rev. A* **9**, 1515 (1974).
- 21 H. M. Gibbs, S. L. McCall e T. N. C. Venkatesan, *Phys. Lett.* **36**, 1135 (1976).
- 22 R. Bonifacio e L. A. Lugiato, *Opt. Commun.* **19**, 172 (1976).

- 23 R. Bonifacio e L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **18**, 1129 (1978).
- 24 E. Abraham and S. D. Smith, *Rep. Prog. Phys.*, **45**, 815 (1981).
- 25 H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan e R. L. Shoemaker, *Phys. Lett.* **46**, 474 (1981).
- 26 L. A. Lugiato, *Progress in Optics*(North-Holland), Amsterdam,**XXI**(1984).
- 27 L. A. Orozoco, A. T. Rosenberger e H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2547 (1984).
- 28 C. M. Savage e D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2164 (1986).
- 29 R. G. Brown e M. Ciftan, *Phys. Rev. A* **40**, 3080 (1989).
- 30 P. Galtola, L. A. Lugiato, M. G. Porreca e P. Tombesi, *Opt. Commun.* **81**, 175 (1991).
- 31 M. Xiao e S. Jin, *Phys. Rev. A* **45**, 483 (1992).
- 32 J. Bergou e D. Zhao, *Phys. Rev. A* **52**, 1550 (1995).
- 33 W. Harshawardhan e G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **53**, 1812 (1996).
- 34 H. Haken, *Light - Waves, Photons, Atoms*, (North-Holland Physics Publishing) (1981).
- 35 W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (John Wiley & Sons) (1990).
- 36 J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley Longman) (1994).
- 37 D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Spreinger Verlag), Berlin (1994).
- 38 A. Kowalewska-Kudlaszyk e R. Tanás, *Acta Physica Slovaca* **50** (3), 323 (2000).
- 39 R. Tanás, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**,142 (2002).
- 40 S. S. Mizrahi, *Optica Nova* **17** (6), 527-535 (1994).